

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Климов Юрий Сергеевич

Должность: и.о. ректора

Дата подписания: 07.10.2024 09:01:23

Уникальный программный ключ:

4e7c4ea90328ec8e65c5d8058549a2538c17400d1

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное

образовательное учреждение высшего образования

«Тюменский индустриальный университет»

Институт транспорта

Кафедра «Прикладная механика»

## СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Методические указания для курсовой работы  
для студентов специальности 15.03.03 Прикладная механика  
направленность (профиль): Моделирование механических систем и процессов

Составители

*Н.А. Кривчун, кандидат технических наук, доцент*

*О.Л. Уманская, кандидат технических наук, доцент*

Тюмень

ТИУ

2024

УДК 605.2 (075.3)

Кривчун Н.А., Уманская О.Л. Строительная механика: Методические указания для курсовой работы для студентов специальности 15.03.03 «Прикладная механика» направленность (профиль): Моделирование механических систем и процессов. – Тюмень: ТИУ, 2024. - 56 с.

Рассмотрены общие методические рекомендации, краткие указания и примеры расчёта, варианты заданий, вопросы для самопроверки по курсовой работе по курсу «Строительная механика» для студентов специальности 15.03.03 «Прикладная механика» направленность (профиль): Моделирование механических систем и процессов очной формы обучения.

## Содержание

Введение.....	4
<b>1. Задача № 1 «Расчёт статически определимой рамы».</b>	
1.1 Краткие указания и пример расчёта.....	6
1.2 Варианты заданий «Расчёт статически определимой рамы.....	12
1.3 Вопросы для самопроверки.....	16
<b>2. Задача № 2 «Расчёт плоской статически определимой фермы».</b>	
2.1 Краткие указания и пример расчёта.....	17
2.2 Варианты заданий «Расчёт плоской статически определимой фермы».....	23
2.3 Вопросы для самопроверки.....	27
<b>3. Задача № 3 «Статически неопределимая рама. Метод сил».</b>	
3.1 Краткие указания и пример расчёта.....	28
3.2 Варианты заданий «Статически неопределимая рама. Метод сил.....	34
3.3 Вопросы для самопроверки.....	38
<b>4. Задача № 4 «Статически неопределимая рама. Метод перемещений».</b>	
4.1 Краткие указания и пример расчета.....	39
4.2 Варианты заданий «Статически неопределимая рама. Метод перемещений».....	46
4.3 Вопросы для самопроверки.....	50
<b>Список литературы.....</b>	<b>51</b>
<b>Приложение 1.....</b>	<b>52</b>
<b>Приложение 2.....</b>	<b>53</b>
<b>Приложение 3.....</b>	<b>54</b>

## Введение

Строительная механика – это наука, которая занимается разработкой методов расчета сооружений на прочность, жёсткость и устойчивость. Она объединяет ряд таких дисциплин, как «Сопротивление материалов», «Теория упругости», «Теория пластичности», «Строительная механика стержневых систем».

Стержневые системы, о которых говорится в данном учебном пособии, находят достаточно широкое применение в качестве несущих элементов конструкций мостов, электропередач и механизмов. Расчёт стержневых конструкций выполняется аналитическими методами: метод вырезания узлов, метод сечений, метод сил, метод перемещений и т.д. В большинстве случаев встречаются более сложные системы, в состав которых помимо стержней входят пластины, оболочки, массивные тела. При расчетах систем в курсе строительной механики используются: метод конечных разностей, метод конечных элементов и другие методы.

В результате изучения предмета студенты должны получить основные теоретические знания в области расчета сооружений, которые позволили бы им проектировать надежные, рациональные, экономичные конструкции.

Основной формой обучения, где студенты приобрели бы навыки конструкторской и расчетной работы, является выполнение курсовой работы.

Методическое указание структурно подразделяется на четыре части. Каждая часть содержит краткие указания к выполнению курсовой работы, примеры решения задач, варианты заданий, таблицы численных данных, вопросы для самопроверки.

Курсовая работа по строительной механике предусматривает четыре обязательные темы: 1) «Расчёт статически определимой рамы»; 2) «Расчёт плоской статически определимой фермы»; 3) «Статически неопределимая рама. Метод сил»; 4) «Статически неопределимая рама. Метод перемещений».

При выполнении курсовой работы студенты должны руководствоваться следующими рекомендациями:

1. Работа выполняется на листах формата А4. Каждая задача должна начинаться с новой страницы, а титульном листе должны быть указаны: данные об исполнителе (Ф.И.О., № группы, вариант, учебный шифр); название и номер работы; фамилия и инициалы ведущего преподавателя (приложение 1).

2. Студент выполняет вариант работы в соответствии с порядковым номером по списку журнала или списком, выданным преподавателем. Исходные данные выбираются по учебному шифру, который состоит из 2-х последних цифр номера зачетной книжки (студенческого билета). Например, зачетная книжка имеет номер СМ-98-039, значит, учебный шифр будет 39.

Таблицы исходных данных состоят из 2-х частей. Для получения необходимых данных задания следует выписать 2 строки: одну – отвечающую первой цифре шифра, вторую – второй цифре. Например, для указанного номера выбираются подчеркнутые цифры (приложение 2).

3. Перед решением каждого задания необходимо полностью записать его условие. Решение следует излагать подробно. Числовые расчеты должны быть произведены до конца, в результатах вычислений следует сохранять 3 значащие цифры.

4. Решение задач, требующих геометрического изображения, должно сопровождаться чертежами с указанием необходимых обозначений, размеров и нагрузок, четкими схемами, на которых должны быть указаны все входящие в расчет величины в числах. На эпюрах и линиях влияния должны быть представлены значения всех характерных ординат и их размерности.

5. После изучения соответствующей темы и выполнения курсовой работы, необходимо пройти собеседование с преподавателем. Работа будет зачтена, если студент выполнил ее верно, и при условии, что он владеет необходимыми теоретическими знаниями.

# 1. Задача № 1

## «Расчет статически определимой рамы»

### 1.1 Краткие указания и пример расчета

Задание.

Для рамы, соответствующей варианту задания, с размерами и нагрузкой, выбранными по шифру из табл.1.1, требуется:

- проверить, является ли данная система статически определимой;
- определить опорные реакции, используя уравнения равновесия, если это необходимо;
- определить участки, отличающиеся характером нагружения и отметить характерные точки приложения опорных реакций, сосредоточенных сил и моментов, точки перегиба рамы, начало и конец действия распределенной нагрузки;
- на каждом участке найти значения изгибающего момента  $M$ , перерезывающей силы  $Q$  и продольной силы  $N$ , используя правило знаков из курса «Сопротивление материалов», за исключением эпюры изгибающих моментов; здесь эпюра изгибающих моментов строится на растянутых волокнах;
- построить эпюры  $M$ ,  $Q$  и  $N$ ;
- выполнить статическую проверку.

Решение.

При действии на раму внешней нагрузки в сечениях её элементов возникают изгибающие моменты  $M$ , перерезывающие силы  $Q$  и продольные силы  $N$ .

Построение эпюры изгибающих моментов рассмотрим на примере расчета плоской рамы, изображенной на рис. 1.1.

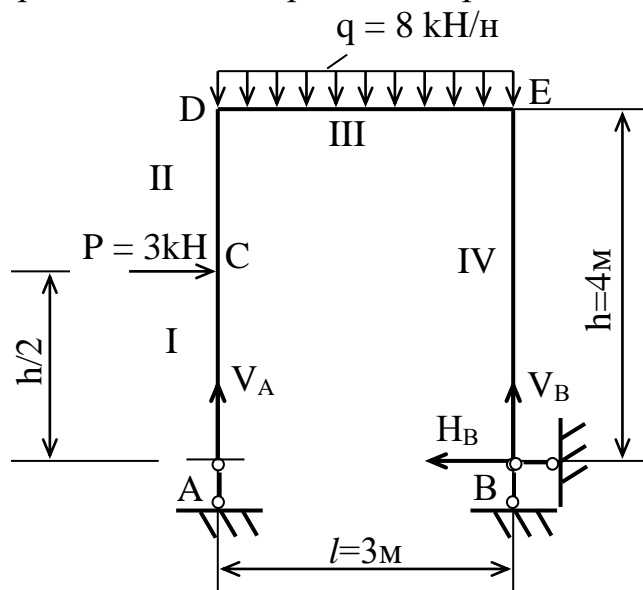


Рис. 1.1. Схема плоской статически определимой рамы

Данная система статически определима, так как число неизвестных реакций  $V_A$ ,  $V_B$ ,  $H_B$  равно числу уравнений статики.

Определяем участки нагружения I – IV и обозначаем характерные точки A, C, D, E и B (рис. 1.1).

Определяем опорные реакции. Уравнение моментов относительно точки В имеет вид:

$$\sum M_B = V_A * l - q * l * \frac{l}{2} + P * \frac{h}{2} = 0.$$

Тогда

$$V_A = \frac{q * \frac{l^2}{2} - P * \frac{h}{2}}{l} = \frac{8 * 4,5 - 3 * 2}{3} = 10 \text{ кН}.$$

Записываем уравнение моментов относительно точки А:

$$\sum M_A = P * \frac{h}{2} + q * l * \frac{l}{2} - V_B * l = 0.$$

Откуда

$$V_B = \frac{P * \frac{h}{2} + q * \frac{l^2}{2}}{l} = \frac{3 * 2 + 8 * 4,5}{3} = 14 \text{ кН}.$$

Находим сумму проекций сил на горизонтальную ось х:

$$\sum F_x = P - H_B = 0 \quad \text{или} \quad H_B = P = 3 \text{ кН}.$$

Выполняем проверку правильности найденных реакций, для чего запишем уравнение суммы проекций всех сил на вертикальную ось у:

$$\sum F_y = V_A + V_B - q * 3 = 10 + 14 - 8 * 3 = 0.$$

Следовательно, реакции найдены верно.

Строим эпюру изгибающих моментов, рассматривая раму по участкам.

Изгибающий момент на участке I равен нулю, так как на этом участке отсутствуют перерезывающие силы:  $M_A = 0$ ;  $M_C = 0$ .

Для определения изгибающего момента на участке II записываем уравнение моментов в точке D, мысленно отбрасывая правую часть:

$$M_D = P * \frac{h}{2} = 3 * 2 = 6 \text{ кН м, растянуты левые волокна}.$$

Рассмотрим участок III и составим уравнение моментов относительно точки D:  $M_D = P * \frac{h}{2} = 3 * 2 = 6 \text{ кН м, растянуты верхние волокна}.$

Записываем уравнение моментов относительно точки E:  $M_E = H_B * h = 3 * 4 = 12 \text{ кН м, растянуты верхние волокна}.$

Изгибающий момент в точке В участка IV равен нулю, а в точке E запишем как  $M_E = H_B * h = 3 * 4 = 12 \text{ кН м, растянуты правые во-}$

локна.

Ординаты эпюры изгибающих моментов откладываем со стороны растянутых волокон (рис. 1.2).

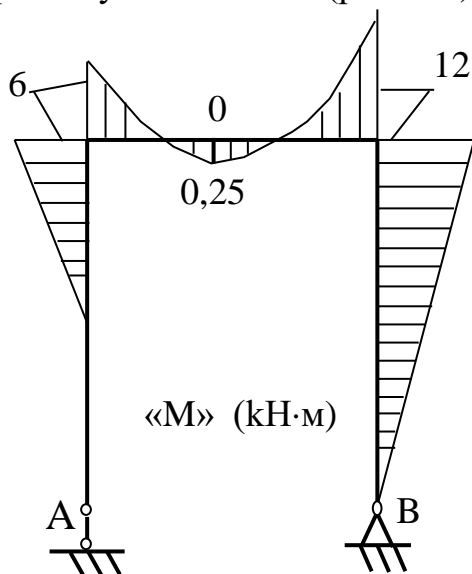


Рис. 1.2. Эпюра изгибающих моментов

Построение эпюры перерезывающих сил  $Q$  выполняем по эпюре изгибающих моментов с учетом двух возможных случаев:

а) на стержне нет перерезывающей нагрузки:

$$Q_x = \frac{dM_x}{dx} = \operatorname{tg} \alpha,$$

где  $\alpha$  - угол наклона эпюры моментов;

б) на стержне есть перерезывающая нагрузка.

В этом случае стержень необходимо рассматривать как балку на двух опорах с приложенной заданной нагрузкой и

опорными моментами, определенными по эпюре моментов. Или по формуле:

$$Q_x = \pm Q_x^0 + \frac{M_{np} - M_{лев}}{l} = \pm \frac{ql}{2} + \frac{M_{np} - M_{лев}}{l},$$

где  $Q_x^0$  - перерезывающая сила, как в простой балке;

$M_{np}$ ,  $M_{лев}$ . - соответственно правый и левый опорные моменты при обычно принятом для балки правиле знаков.

Перерезывающее усилие положительно, если стержень до совмещения с касательной к эпюре моментов повернуть на острый угол по часовой стрелке.

Участок III загружен распределенной нагрузкой. Представляем его как балку на двух опорах с приложенной заданной нагрузкой (рис. 1.3) и опорными моментами, снятыми с эпюры изгибающих моментов (рис. 1.2).

Опорные реакции  $R_D$  и  $R_E$  являются искомыми величинами, для отыскания которых составляем два уравнения моментов относительно точек D и E:

$$\sum M_D(F) = M_E + q * l * l/2 - M_D - R_E * l = 0;$$

$$12 + 8 * 3 * 1,5 - 6 + R_E * 3 = 0; \quad R_E = 14 \text{ кН.}$$

$$\sum M_E(F) = M_E - q * l * l/2 - M_D + R_D * l = 0;$$

$$12 - 8 * 3 * 1,5 - 6 + R_D * 3 = 0; \quad R_D = 10 \text{ кН.}$$



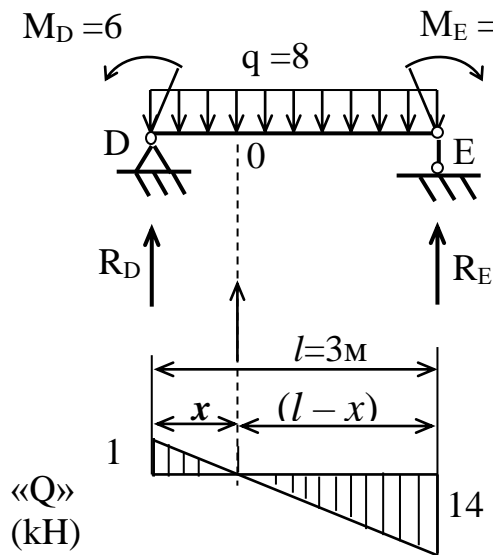


Рис. 1.3. Эпюра перерезывающих сил на участке III

Реакции  $R_D$  и  $R_E$  являются перерезывающими силами. Перерезывающая сила  $R_D$  вращает стержень относительно противоположного конца E по ходу часовой стрелки, следовательно, она положительна. Перерезывающая сила  $R_E$  отрицательна, так как стремится вращать конец стержня D против хода часовой стрелки.

По полученным силам  $R_E, R_D$  строим эпюру перерезывающих сил и находим положение точки O пересечения эпюры с базой на основе свойств подобных

треугольников (рис. 1.3):

$$\frac{10}{x} = \frac{14}{l-x}; \quad 10(l-x) = 14x; \quad x = 1,25 \text{ м.}$$

Составляем уравнение моментов относительно точки O слева:

$$M_0(1,25) = -R_D \cdot 1,25 + M_D + q \cdot 1,25 \cdot 0,625;$$

$M_0(1,25) = -10 \cdot 1,25 + 6 + 8 \cdot 1,25 \cdot 0,625 = -0,25 \text{ кНм}$  и уточняем эпюру изгибающих моментов (рис.1.2).

Перерезывающая сила на участке I равна нулю.

Рассмотрим участок II, перерезывающая сила которого находится

по формуле  $Q_C = \frac{dM_x}{dx} = -\frac{6}{2} = -3 \text{ кН.}$

Аналогично определяем перерезывающую силу на участке IV:

$$Q_B = \frac{dM_x}{dx} = \frac{12}{4} = 3 \text{ кН.}$$

С учетом найденных значений строим эпюру перерезывающих сил Q (рис. 1.4).

Эпюра продольных сил «N» строится по эпюре перерезывающих сил «Q» методом вырезания узлов рамы с учетом действующих сосредоточенных сил. При этом неизвестные продольные силы направляем от узла, предполагая их положительными (растягивающими), а ранее найденные перерезывающие силы - с учетом знака эпюры «Q». Положительная перерезывающая сила должна вращать узел по ходу часовой стрелки. Из условия равновесия определяем неизвестные продольные силы в стержнях с помощью уравнений суммы проекций сил, приложенных к узлу (рис.1.5 а, в.):

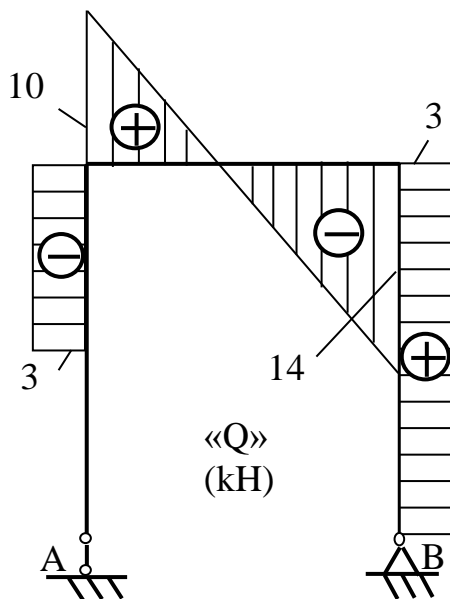
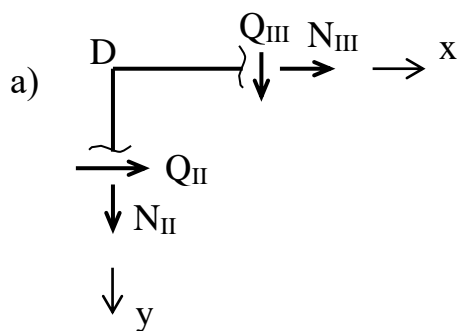


Рис. 1.4. Эпюра перерезывающих сил Q



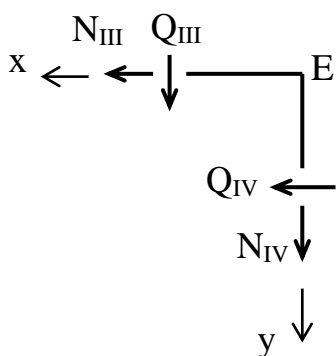
$$\Sigma X = Q_{II} + N_{III} = 0;$$

$$N_{III} = -Q_{II} = -3 \text{ кН};$$

$$\Sigma Y = Q_{III} + N_{II} = 0;$$

$$N_{II} = -Q_{III} = -10 \text{ кН}.$$

в)



$$\Sigma X = N_{III} + Q_{IV} = 0;$$

$$N_{III} = -Q_{IV} = -3 \text{ кН};$$

$$\Sigma Y = Q_{III} + N_{IV} = 0;$$

$$N_{IV} = -Q_{III} = -14 \text{ кН}.$$

Рис. 1.5. Определение продольных сил методом вырезания узлов: а) узел D; в) узел E

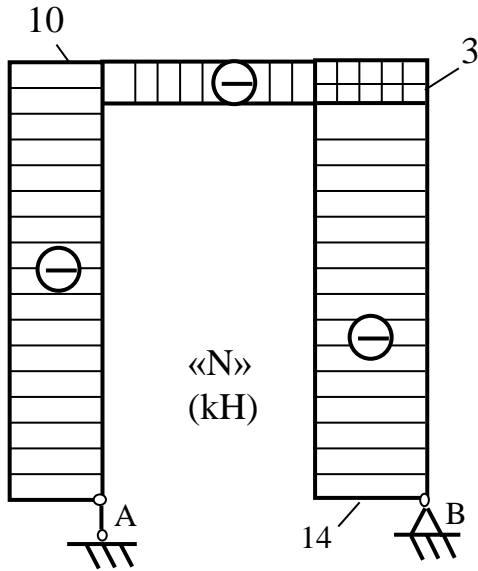


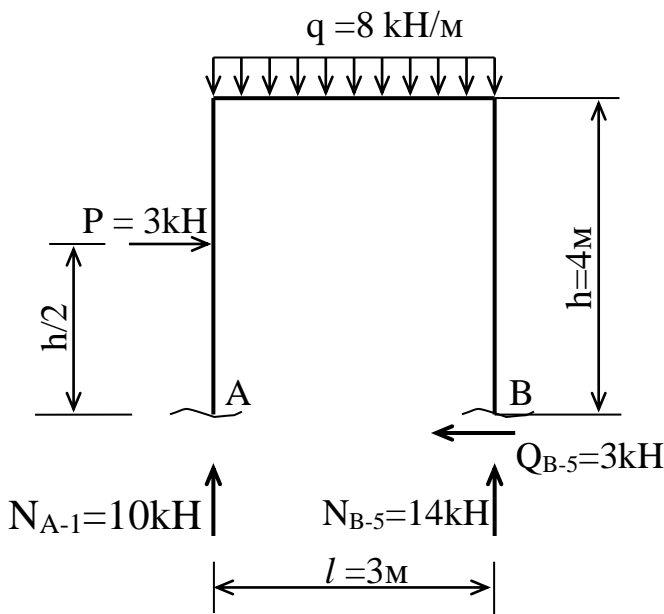
Рис. 1.6. Эпюра продольных сил «N»

На участках I и II продольная сила постоянна.

По полученным значениям строим эпюру продольных сил (рис. 1.6).

После определения внутренних усилий  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  выполняем статическую проверку, которая заключается в том, что любая часть рамы должна находиться в равновесии. Для этого отсекаем раму от опор, в сечениях прикладываем моменты, продольные и поперечные силы в соответствии с эпюрами  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  (рис. 1.7).

Далее составляем уравнения равновесия в виде суммы проекций сил на оси  $x$ ,  $y$  и уравнение моментов относительно точки  $B$ :



$$\Sigma F_x = P - Q_{IV} = 3 - 3 = 0;$$

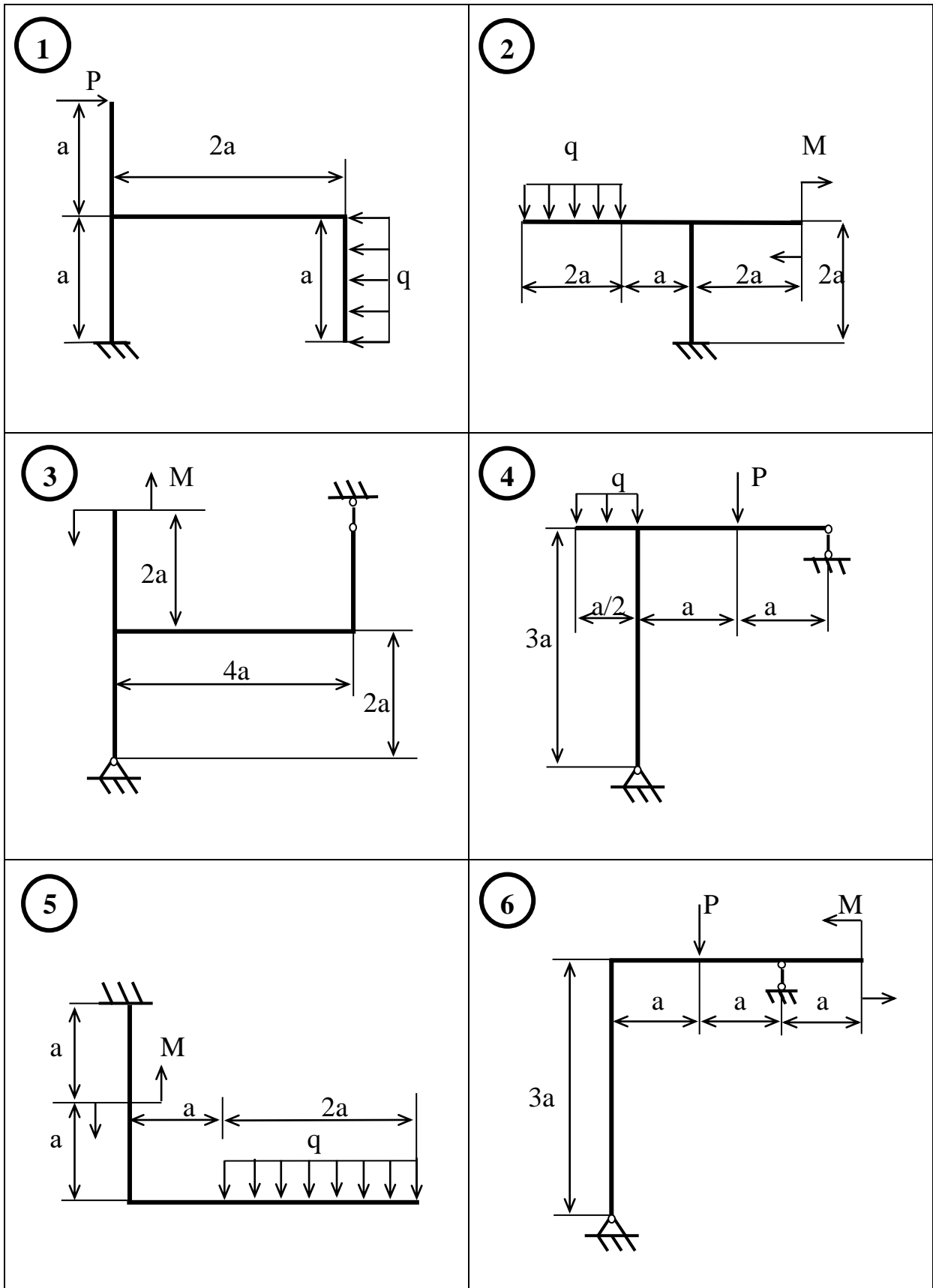
$$\Sigma F_y = N_I + N_{IV} - q * 3 = 10 + 14 - 8 * 3 = 0;$$

$$\Sigma M_B(F) = N_I * 3 + P * 2 - q * 3 * 1,5 = 10 * 3 + 3 * 2 - 8 * 3 * 1,5 = 0.$$

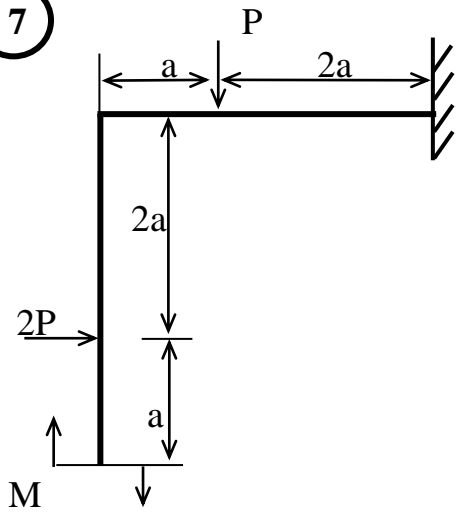
Равенство нулю всех трех уравнений равновесия говорит о правильном построении эпюр внутренних усилий.

Рис. 1.7. Статическая проверка

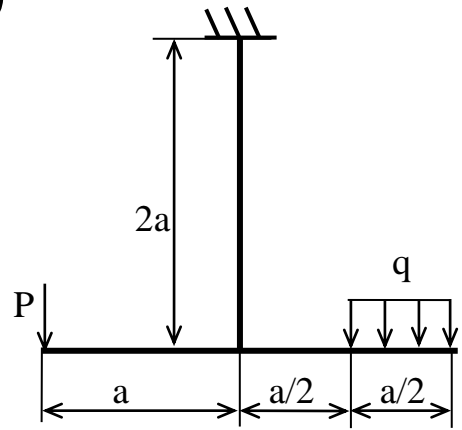
1.2. Варианты заданий к задаче № 1 «Расчет статически определимой рамы»



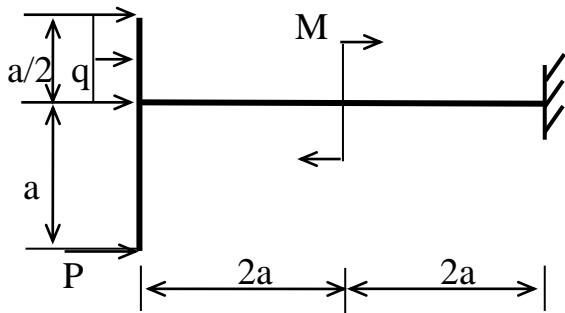
7



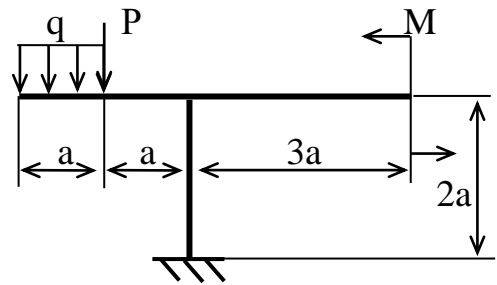
8



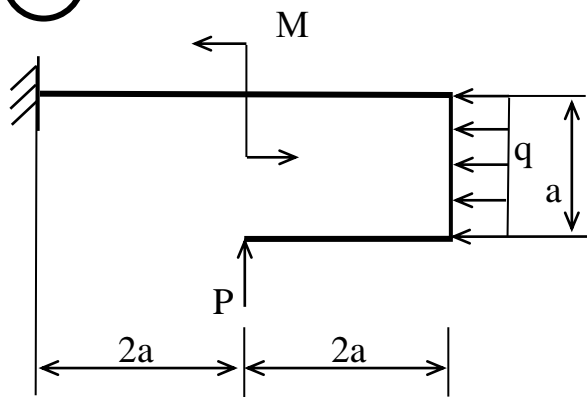
9



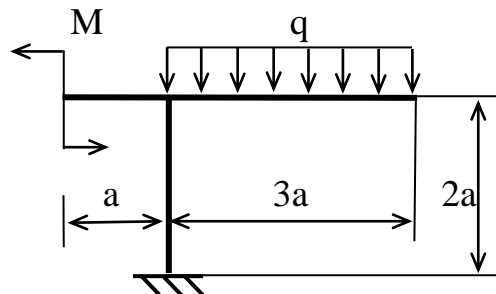
10



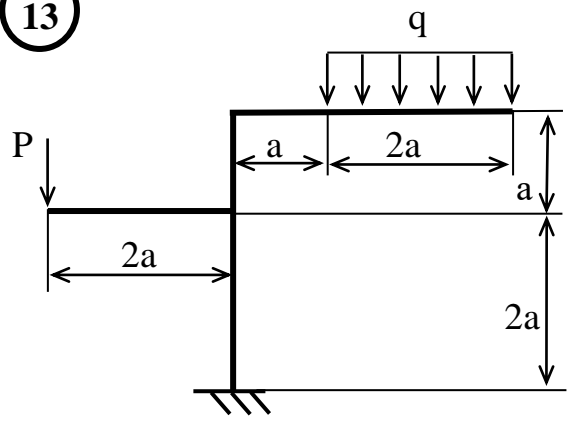
11



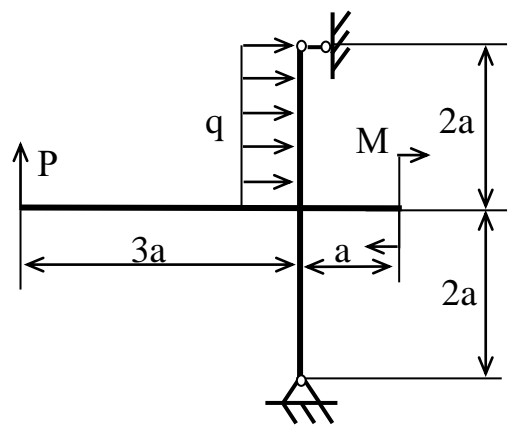
12



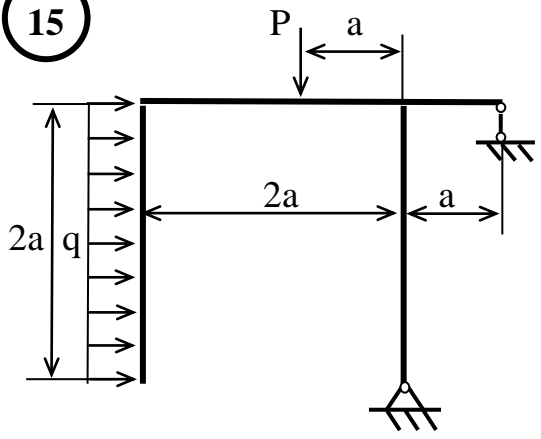
13



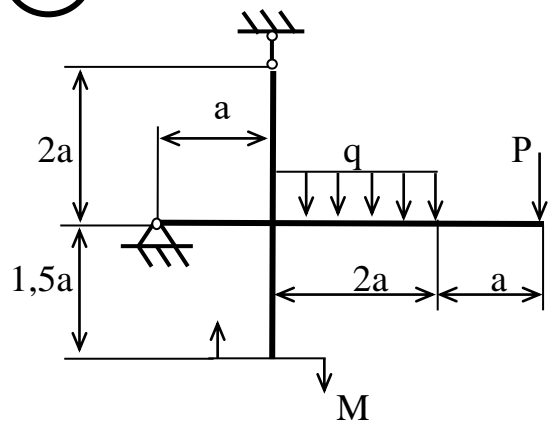
14



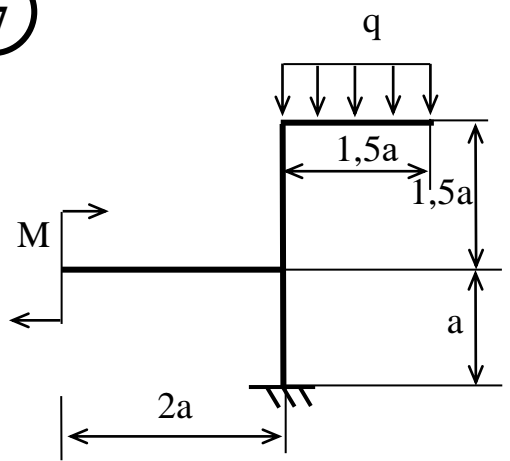
15



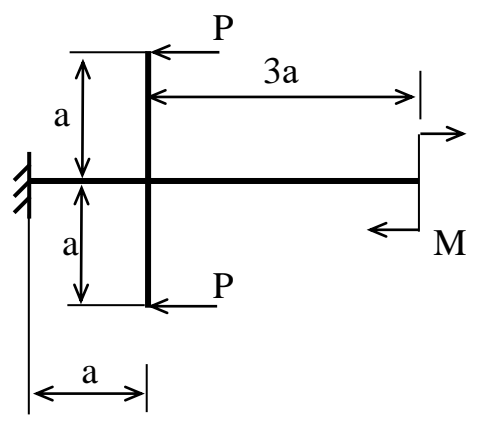
16



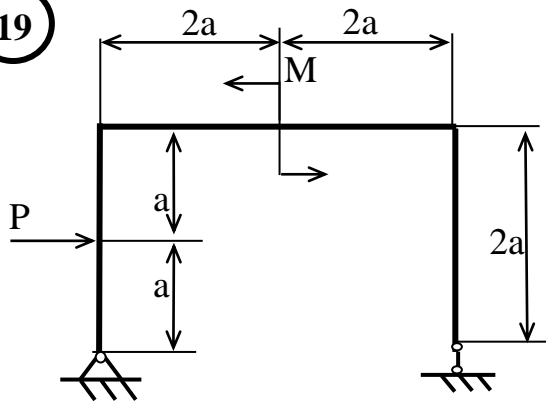
17



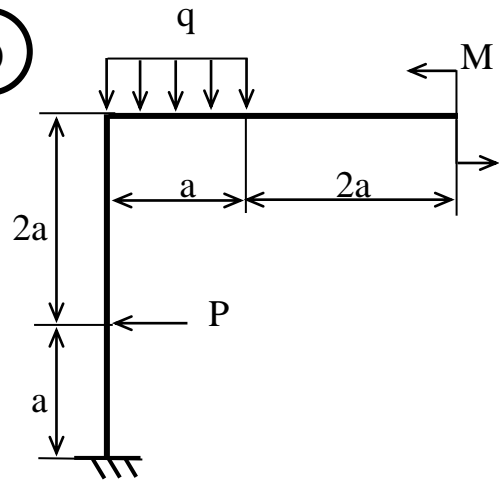
18



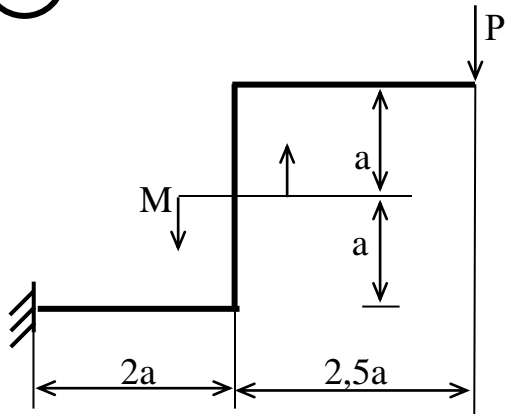
19



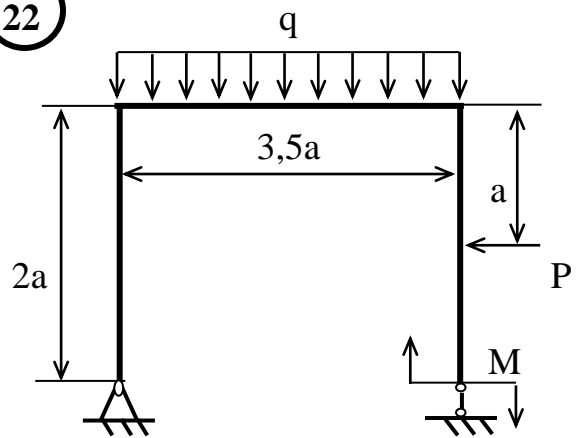
20



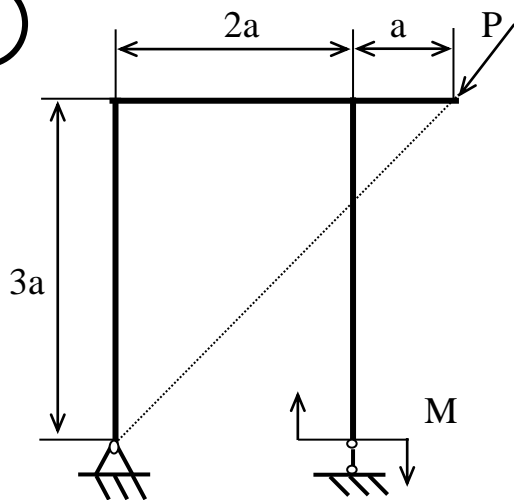
21



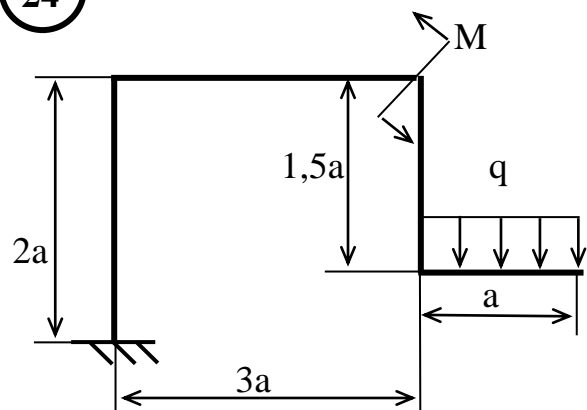
22



23



24



**Численные данные к задаче № 1 «Расчет статически определимой рамы»**

№	По предпоследней цифре		По последней цифре шифра		
	P, кН	M, кНм	q, кН/м	a, м	$\kappa=H/B$
1	10	10	10	1	0.4
2	11	20	9	2	0.8
3	12	30	8	3	1.2
4	13	40	7	4	1.6
5	14	50	6	5	2
6	15	60	5	6	2.4
7	16	70	4	7	2.8
8	17	80	3	8	3.2
9	18	90	2	9	3.6
10	19	100	1	10	4

**1.3. Вопросы для самопроверки.**

1. Что такое расчетная схема сооружения? Каковы требования, предъявляемые к ней?
2. Какие системы называются кинематически неизменяемыми, изменяемыми, мгновенно изменяемыми?
3. Назовите геометрические признаки неизменяемых систем.
4. Уравнение статики для одномерных задач, плоских (двухмерных) и трехмерных.
5. Как определяются опорные реакции в статически определимых рамах?
6. Определение изгибающего момента на примере расчета рамы. Правило знаков для изгибающих моментов.
7. Определение перерезывающей силы на примере расчета рамы. Правило знаков для перерезывающей силы.
8. Определение продольной силы N на примере расчета рамы. Правило знаков для продольной силы.
9. Проверка правильности построения эпюр M, N, Q.



## 2. Задача № 2 «Расчет плоской статически определимой фермы»

### 2.1. Краткие указания и пример расчета

Задание.

Для фермы (размеры и нагрузка приведены в табл. 2.1) требуется:

- аналитически определить продольные усилия в стержнях заданного узла фермы от действия постоянной нагрузки;
- построить линии влияния усилий в стержнях этого узла.

Аналитическое определение усилий в стержнях заданного узла фермы от действия постоянной нагрузки ведется с применением метода вырезания узлов, метода сквозного сечения, для реализации которого существует способ моментной точки и способ проекций.

Решение.

Рассмотрим пример расчета плоской фермы с численными данными: длина пролета  $l = 24\text{ м}$ , сила  $P = 3\text{ кН}$ . Требуется определить усилия в стержнях, образующих узел «3», и построить линии влияния усилий при поузловом перемещении груза  $P = 1$  по верхнему поясу фермы (рис. 2.1).

Определим угол наклона раскоса фермы  $\alpha$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}l}{4} : \frac{l}{8} = 3,464,$$

$$\text{или } \alpha = 74^\circ.$$

Для заданной фермы вычисляем опорные реакции  $R_A$  и  $R_B$  из уравнений моментов относительно точек А и В:

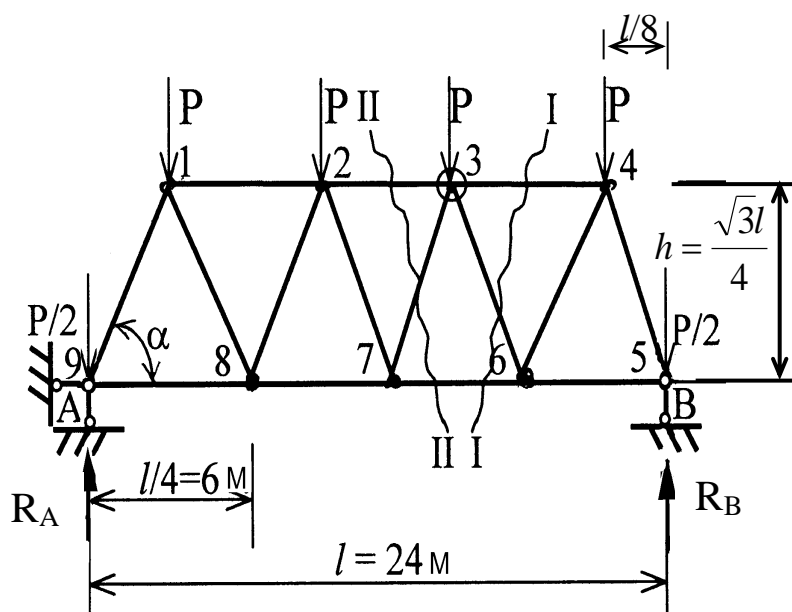


Рис. 2.1. Плоская статически  
определимая ферма

$$\sum M_A(F) = R_B * l - P\left(\frac{7}{8}l + \frac{5}{8}l + \frac{3}{8}l + \frac{l}{8}\right) - \frac{P}{2} * l = 0; \quad R_B = 7,5\text{ кН}.$$

$$\sum M_B(F) = -R_A * l + P\left(\frac{7}{8}l + \frac{5}{8}l + \frac{3}{8}l + \frac{l}{8}\right) + \frac{P}{2} * l = 0; \quad R_A = 7,5\text{ кН}.$$

Проверочным будет уравнение проекций сил на ось у:

$$\sum F_y = R_A + R_B - 4P - \frac{P * 2}{2} = 7,5 + 7,5 - 4 * 3 - 3 = 0.$$

Для определения усилий  $N_{3-4}$ ,  $N_{3-6}$  проводим сквозное сечение I - I, отбрасываем правую часть, указываем продольные силы в разрезанных стержнях направленными от узлов (растяжение) и внешние нагрузки (рис. 2.2)

Усилие  $N_{3-4}$  находим по способу моментной точки, так как два

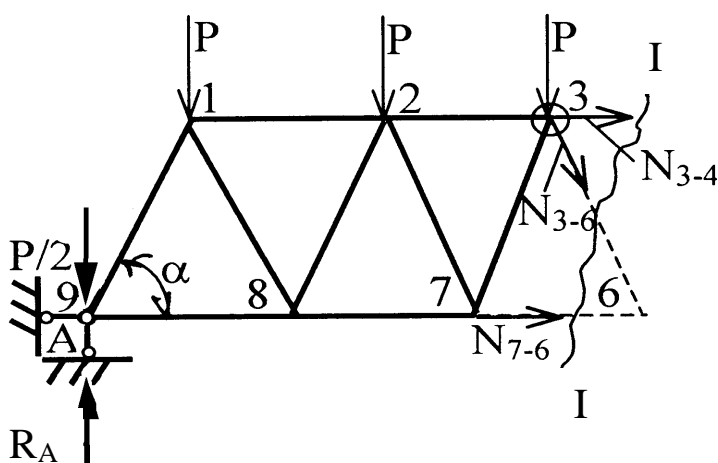


Рис. 2.2. Сечение I-I фермы, левая часть

других разрезанных стержня пересекаются в одной точке «6». Уравнение равновесия относительно моментной точки для левой части фермы имеет вид

$$\sum M_6(F) = -N_{4-3} * \frac{\sqrt{3} * l}{4} + P * (\frac{l}{8} + \frac{3 * l}{8} + \frac{5 * l}{8}) + \frac{P}{2} * \frac{6 * l}{8} - R_A * \frac{6 * l}{8} = 0,$$

откуда  $N_{3-4} = -2,56 \text{ кН}.$

Так как разрезанные стержни 3-4 и 7-6 не имеют общей точки в силу их параллельности, то усилие  $N_{3-6}$  определяем по способу проекций. Составляем уравнение суммы проекций сил на вертикальную ось у для левой части фермы (рис. 2.2):

$$\sum F_y = R_A - \frac{P}{2} - 3 * P - N_{3-6} * \cos 16^\circ = 0, \quad \text{тогда} \quad N_{3-6} = -3,06 \text{ кН}.$$

Для определения усилий  $N_{2-3}$ ,  $N_{3-7}$  проводим сквозное сечение II-II, отбрасываем левую часть. Указываем продольные силы в разрезанных стержнях направленными от узлов (растяжение) и внешние нагрузки. Если есть точка пересечения двух других разрезанных стержней, то применяем способ моментной точки, если нет, способ проекций. Записываем уравнение моментов относительно точки «7» (рис.2.3):

$$\sum M_7(F) = -N_{2-3} * h + P * (\frac{l}{8} + \frac{3 * l}{8}) + \frac{P}{2} * \frac{l}{2} - R_B * \frac{l}{2} = 0,$$

откуда  $N_{2-3} = -4,04 \text{ кН}.$

Уравнение проекций на ось у имеет вид

$$\sum F_y = R_B - 2P - \frac{P}{2} - N_{3-7} * \cos 16^\circ = 0, \text{ откуда } N_{3-7} = -1,56 \text{ кН.}$$

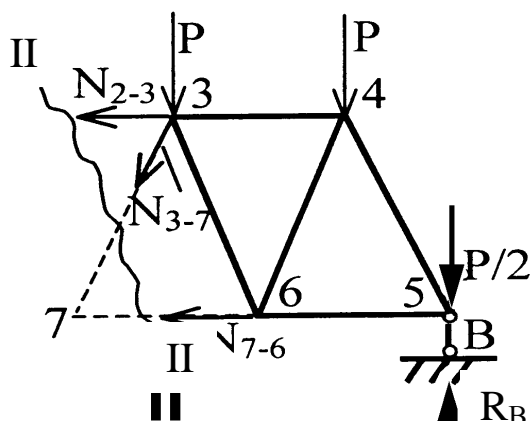


Рис. 2.3. Сечение II-II фермы, правая часть

Строим линии влияния усилий указанных стержней. Рассмотрим данную ферму при поузловом перемещении груза  $P = 1$  по верхнему поясу.

При построении линий влияния используем те же методы, что и при аналитическом определении усилий в стержнях фермы от неподвижной нагрузки. Построим линию влияния усилия в стержне 3-4, для чего проведем сечение I-I (рис. 2.4).

Когда груз  $P = 1$  находится правее узла «3», удобнее рассматривать равновесие левой отсеченной части фермы, так как на нее в этом случае действует меньше сил, чем на правую. Применяя **способ моментной точки**, составим уравнение суммы моментов всех сил, действующих на левую часть фермы относительно точки «6», «правая линия» (рис. 2.4).

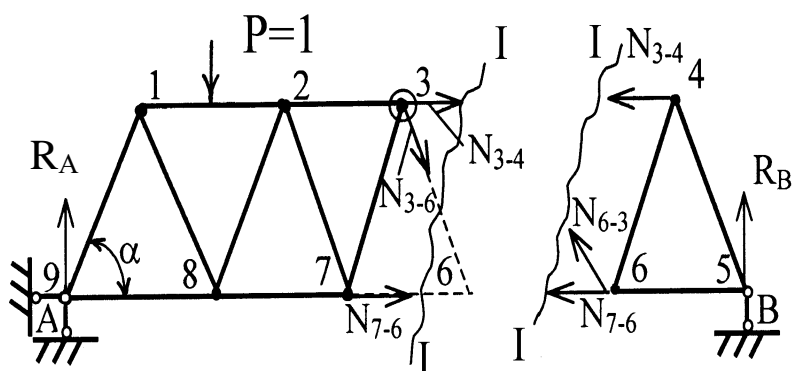


Рис. 2.4. Сечение I-I фермы, левая и правая части

$$\sum M_6(F) = -R_A * \frac{6l}{8} - N_{3-4} * h = 0,$$

тогда

$$N_{3-4} = -\frac{R_A * 6l}{8 * h} = -1,73 \text{ кН.}$$

При положении груза  $P = 1$  на правой части фермы усилие  $N_{3-4}$  равно левой опорной реакции  $R_A$ , умноженной на постоянный коэффициент. Для построения правой линии влияния (рис. 2.6, б) откладываем на оси отсчета вверх на левой опорной вертикали ординату, равную 1,73 (отрицательные значения откладываем выше, а положительные значения - ниже оси отсчета), и соединяем прямой ее вершину с нулевой точкой на правой опорной вертикали.

При грузе  $P = 1$ , расположенном левее узла «3», усилие в стержне 3–4 находим из уравнения равновесия для правой части фермы «левая линия» (рис. 2.4):

$$\sum M_6(F) = N_{3-4} * h + R_B * \frac{l}{4} = 0, \quad \text{тогда} \quad N_{3-4} = -\frac{R_B * l}{h * 4} = -0,57 kH.$$

Усилие в стержне 3–4 равно правой опорной реакции  $R_B$ , увеличенной в 0,57 раз.

Левую линию строим аналогично правой: на правой опорной вертикали откладываем ординату 0,57 вверх от базы (оси отсчета) и соединяем с нулевой точкой на левой опорной вертикали (рис. 2.6,б). При этом правая и левая линии пересеклись под моментной точкой «б» (в точке «б'»). На построенные правую и левую линии сносим соответственно правый «4» и левый «3» узлы и строим передаточную линию 3'-4', отражающую движение груза  $P = 1$  между узлами рассеченной панели «3» и «4».

**Способом проекций** воспользуемся при построении линии влияния усилия в раскосе 3–6 фермы (рис. 2.4). Когда груз  $P = 1$  расположен в узле «4» (движение по верхнему поясу), рассматриваем равновесие левой отсеченной части фермы. Составляем уравнение проекций всех сил на вертикальную ось («правая линия»):

$$\sum F_y = R_A - N_{6-3} * \cos(90^\circ - \alpha) = 0; \quad N_{3-6} = \frac{R_A}{\cos 16^\circ} = \frac{1}{\cos 16^\circ} \approx 1,04.$$

При грузе, расположенном между узлами «1» и «3», рассматриваем условие равновесия правой части фермы (рис. 2.4). Спроецировав все силы на вертикальную ось, получаем «левую линию»:

$$\sum F_y = R_B + N_{6-3} * \cos(90^\circ - \alpha) = 0; \quad N_{6-3} = -\frac{R_B}{\cos 16^\circ} = -\frac{1}{\cos 16^\circ} \approx -1,04.$$

Для построения «правой линии» откладываем от базы вниз на левой опорной вертикали ординату 1,04, вершину которой соединяем с нулевой точкой правой опорной вертикали (рис. 2.6,в). А левую линию строим, соединяя вершину ординаты 1,04, направленной вверх от базы, на правой опорной вертикали с нулем левой опорной вертикали. Передаточная линия соединяет вершины узловых ординат «3'» и «4'» рассеченной панели 3–4 (рис. 2.6,в).

При построении линии влияния усилия  $N_{2-3}$  используем способ моментной точки, сквозное сечение II–II (рис. 2.5).

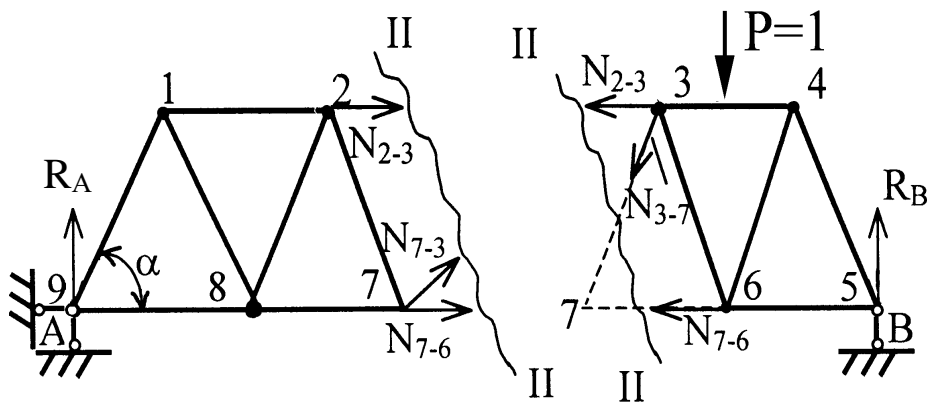


Рис. 2.5. Сечение II – II фермы, левая и правая части

Выше подробно говорилось о построении правой, левой и передаточной линий, поэтому достаточно записать уравнение моментов относительно точки «7» для левой части фермы («правая линия»):

$$\sum M_7(F) = -R_A * \frac{l}{2} - N_{2-3} * h = 0; \quad N_{2-3} = -\frac{R_A * l}{h * 2} = -1,15.$$

Для построения «левой линии», когда груз  $P=1$  слева от сечения II – II, составляем уравнение моментов для правой части фермы относительно сечения II – II (рис.2.5):

$$\sum M_7(F) = -N_{2-3} * h + R_B * \frac{l}{2} = 0, \quad \text{тогда}$$

$$N_{2-3} = -\frac{R_B * l}{h * 2} = -1,15.$$

По найденным значениям проводим «правую и левую линии», которые пересекаются под моментной точкой «7». Передаточную линию строим по проекциям узлов «2» и «3» рассеченной панели 2 – 3 (рис. 2.6, г).

Линию влияния усилия  $N_{3-7}$  строим по полученным результатам из уравнений проекций на вертикальную ось (рис. 2.5).

Уравнение «правой линии» имеет вид

$$\sum F_y = R_A - N_{3-7} * \cos(90^\circ - \alpha) = 0,$$

$$\text{тогда} \quad N_{3-7} = -\frac{Y_A}{\cos 16^\circ} = -\frac{1}{\cos 16^\circ} \approx -1,04;$$

уравнение «левой линии»

$$\sum F_y = R_B - N_{3-7} * \cos(90^\circ - \alpha) = 0.$$

В итоге получаем 
$$N_{3-7} = \frac{R_B}{\cos 16^\circ} = \frac{1}{\cos 16^\circ} \approx 1,04.$$

«Левая» и правая линии» параллельны и имеют противоположные знаки.

Передаточная (переходная) линия соединяет вершины узловых ординат «2'» и «3'» рассеченной панели 2 – 3 (рис. 2.6, д).

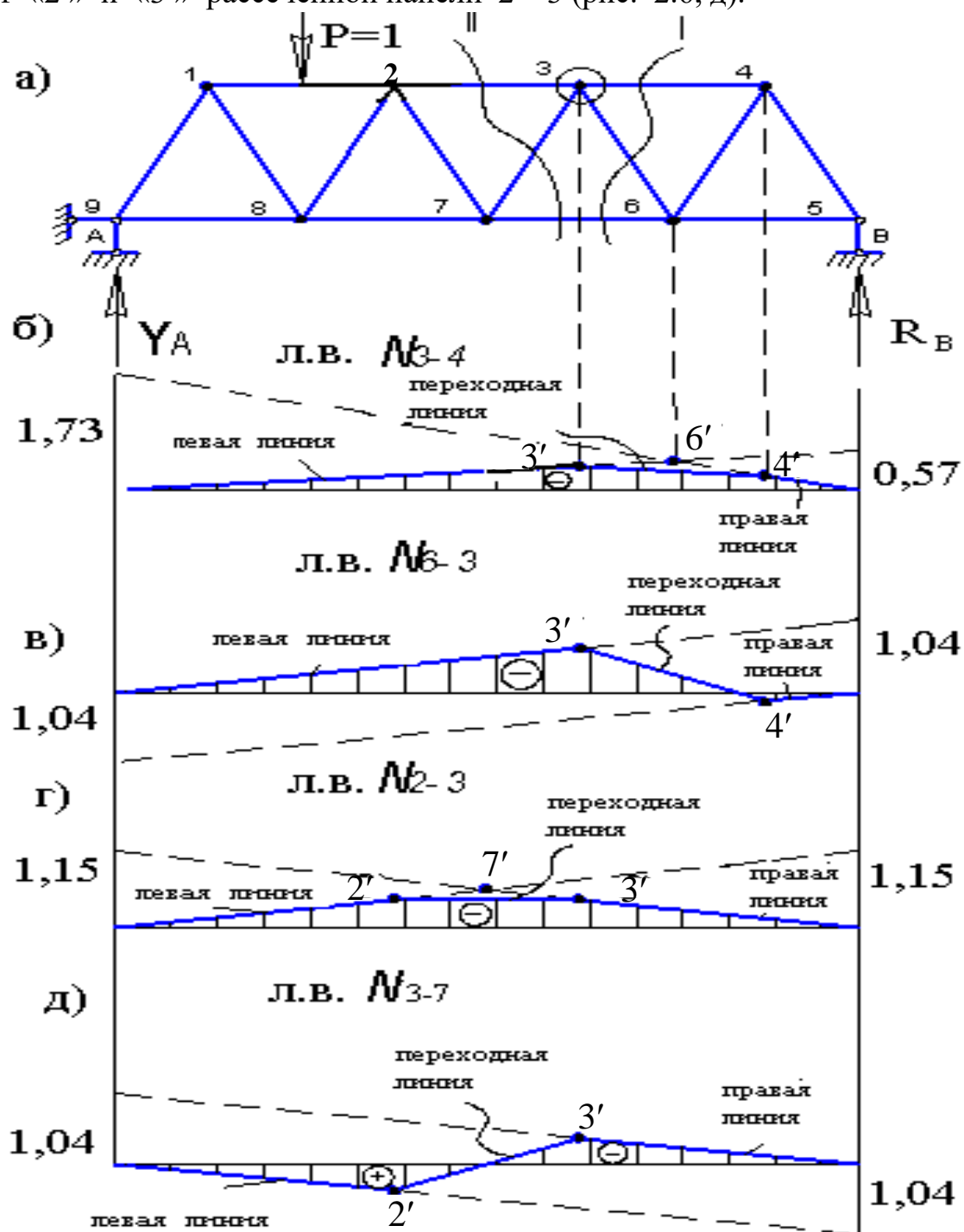
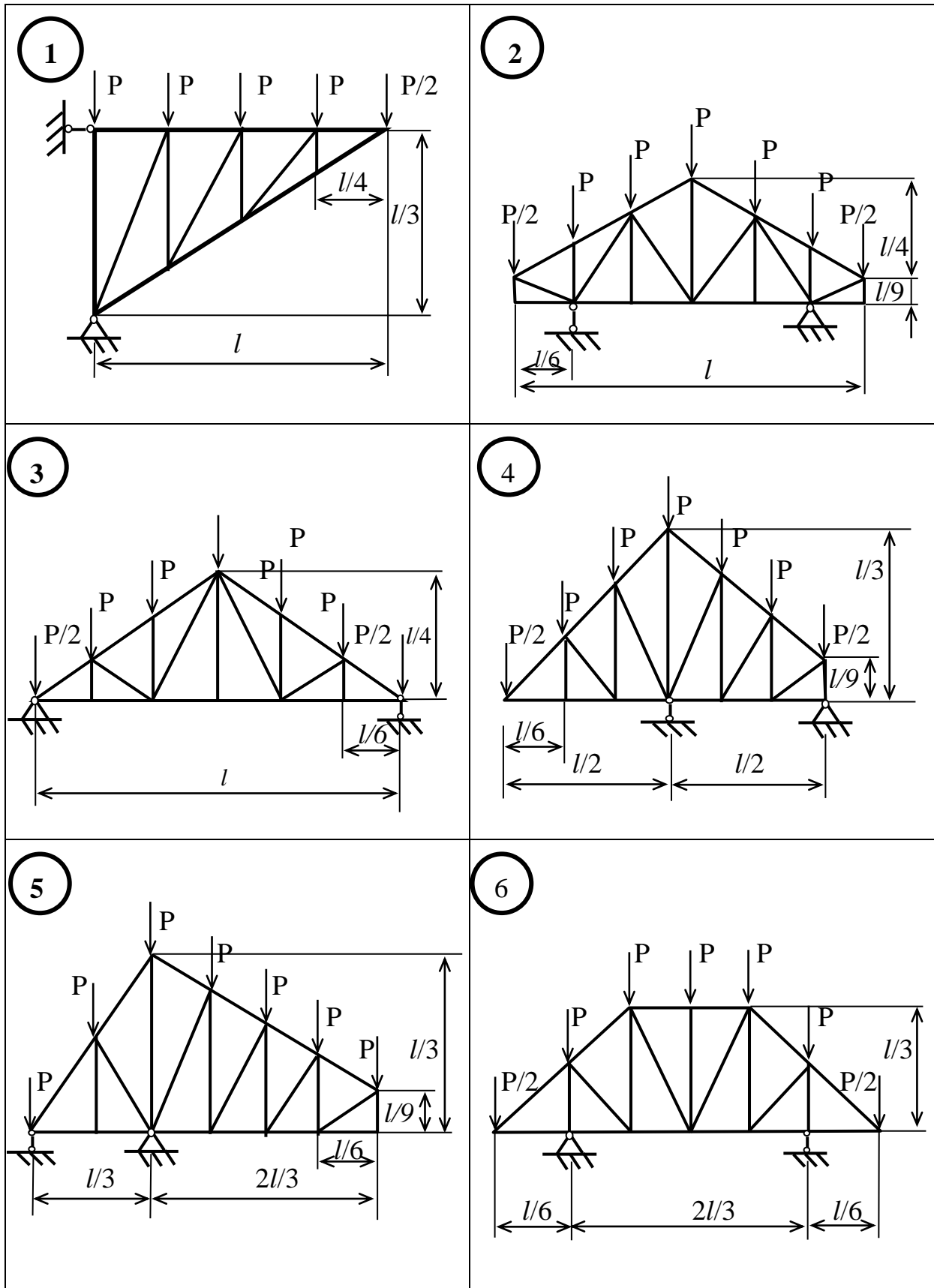
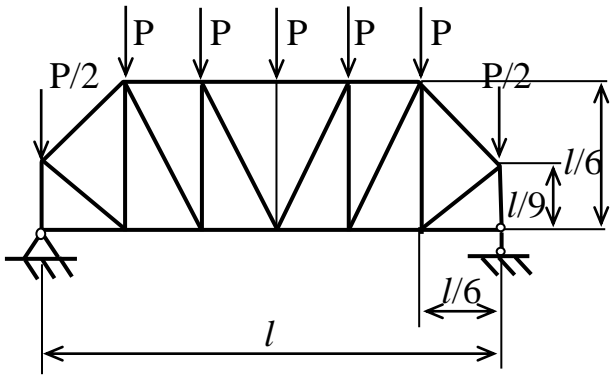


Рис. 2.6. Линии влияния

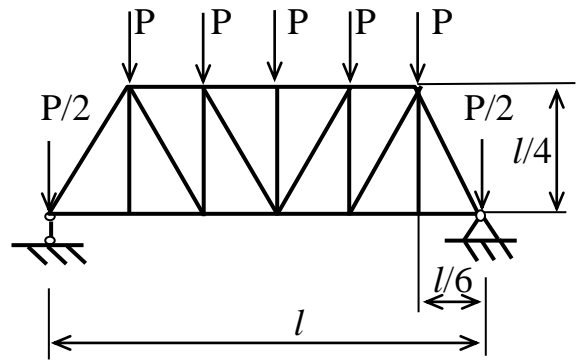
2.2. Варианты заданий к задаче № 2 «Расчет плоской статически определимой фермы»



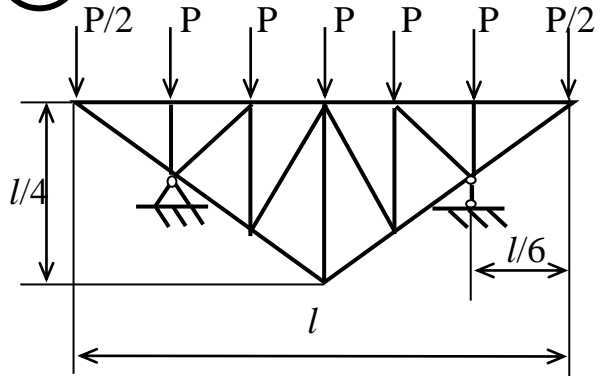
7



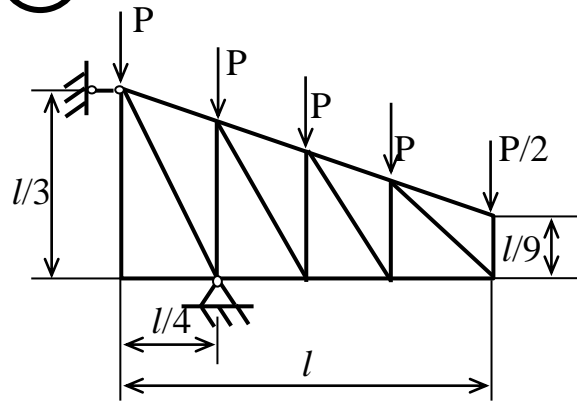
8



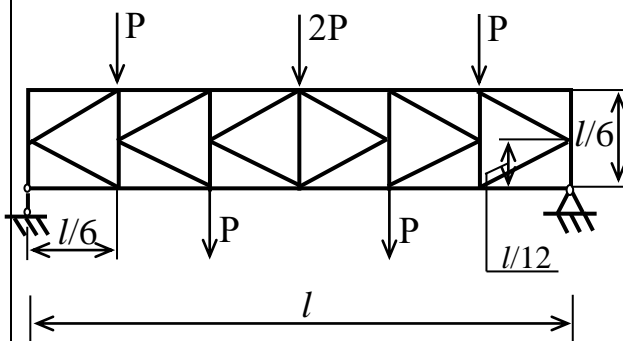
9



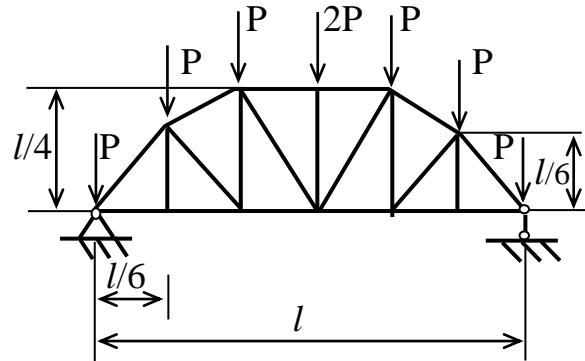
10



11

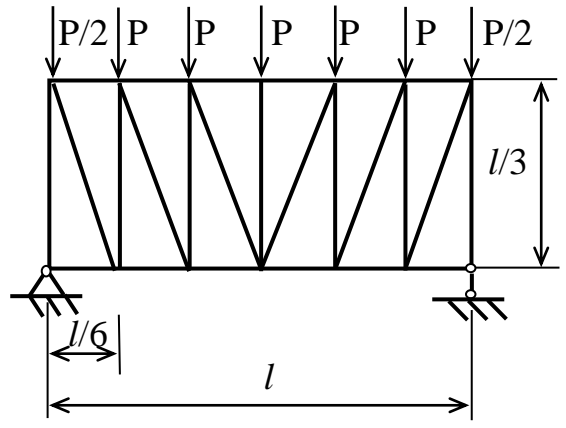


12

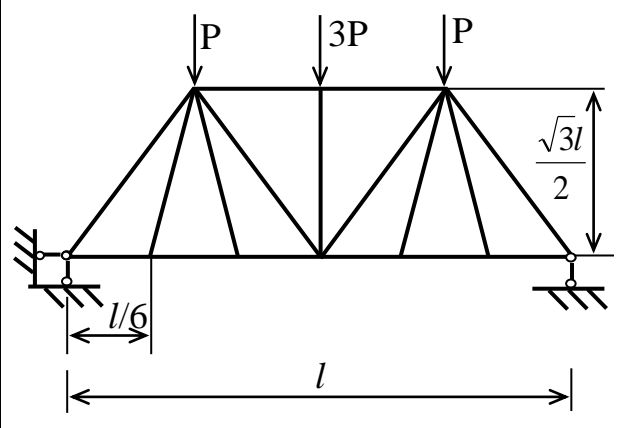




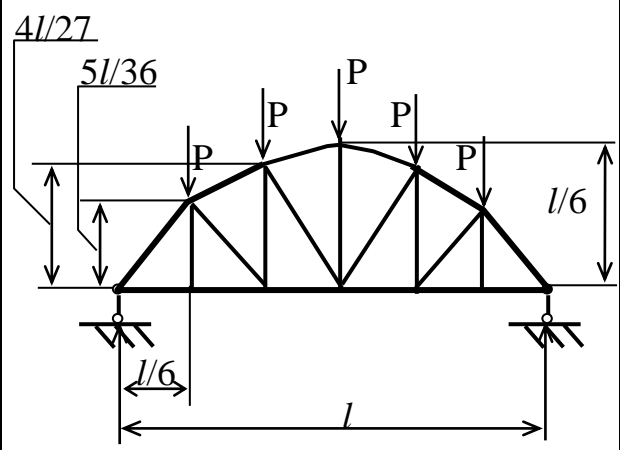
13



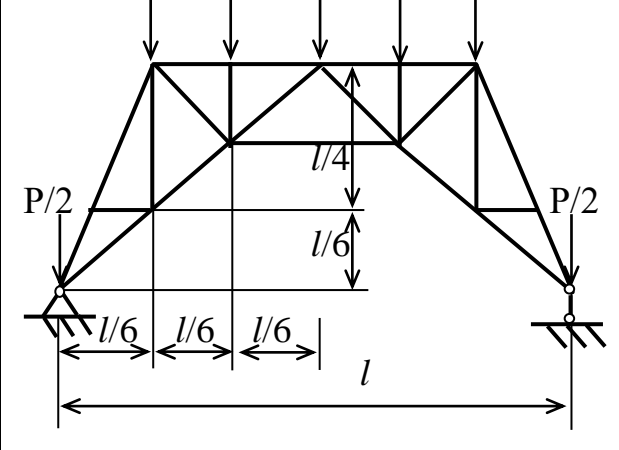
14



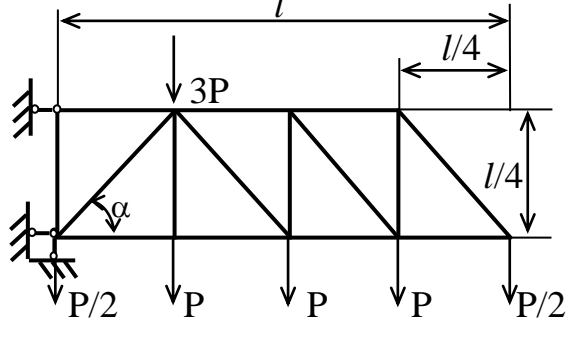
15



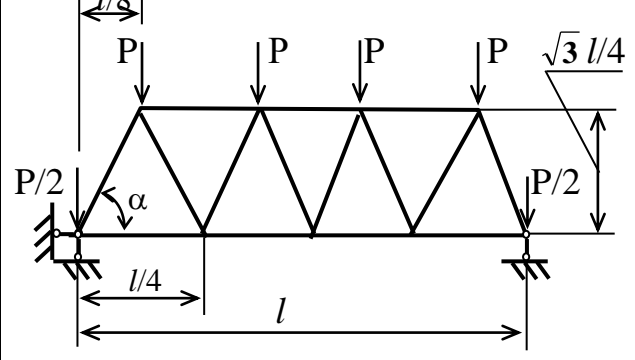
16



17



18





**Численные данные к задаче № 2**  
**«Расчет плоской статически определимой фермы»**

№	По предпоследней цифре	По последней цифре		Р, кН
		Узел «с» на поясе		
	<i>l, м</i>	верхний	нижний	
1	10	3	-	1
2	12	-	3	0.5
3	14	2	-	1.5
4	16	4	-	2
5	20	-	4	3
6	18	3	-	2.5
7	24	3	-	4
8	26	-	3	2
9	21	2	-	3.5
10	13	-	2	5

**2.3. Вопросы для самопроверки.**

1. Основные признаки фермы.
2. Методы расчета ферм при статической и подвижной нагрузке.
3. В чем суть метода вырезания узлов? Каковы недостатки и преимущества этого метода?
4. Условия применения метода сквозных сечений.
5. Методы определения продольных усилий, используемые при расчете ферм на подвижную нагрузку.
6. Линии влияния внутренних усилий на примерах расчета балок и ферм.
7. Чем отличается линия влияния от эпюры? Как строятся «левые» и «правые» ветви линий влияния? Что называется переходной линией, на каком участке фермы она строится?
8. Как учитывается узловая передача нагрузки при построении линий влияния?
9. Каков смысл ординат линий влияния продольных усилий в стержнях фермы, какова их размерность?
10. Как с помощью линий влияния определить расчетное положение в пролете фермы сосредоточенных сил?
11. Какую часть плоской стержневой системы рациональнее рассматривать в равновесии при построении «правой» и «левой» ветвей линии влияния усилия в стержне для пролетной и консольной частей ферм?

### 3. Задача № 3 «Статически неопределимая рама. Метод сил»

#### 3.1 Краткие указания и пример расчета.

Задание.

Для рамы, соответствующей варианту задания, с размерами и нагрузкой, выбранными по шифру из табл. 3.1, требуется:

- установить степень статической неопределимости;
- выбрать основную систему метода сил;
- написать канонические уравнения метода сил;
- построить эпюры изгибающих моментов от единичных сил и от внешних нагрузок в выбранной основной системе; вычислить перемещения, входящие в канонические уравнения по способу Верещагина или по формуле Мора;
- построить суммарно – единичную эпюру и проверить правильность вычисленных единичных коэффициентов и свободных членов;
- решив систему канонических уравнений, определить значения основных неизвестных;
- построить окончательную эпюру изгибающих моментов;
- выполнить кинематический контроль окончательной эпюры моментов;
- построить эпюры перерезывающих и продольных сил;
- выполнить статическую проверку окончательных эпюр.

Решение.

Рассмотрим плоскую раму, изображенную на рис. 3.1, а.

Определяем степень статической неопределимости системы ( $n$ ). Здесь лишние две связи. Следовательно,  $n = 2$ .

Выбираем основную систему с неизвестными  $X_1$  и  $X_2$  (рис. 3.1, б).

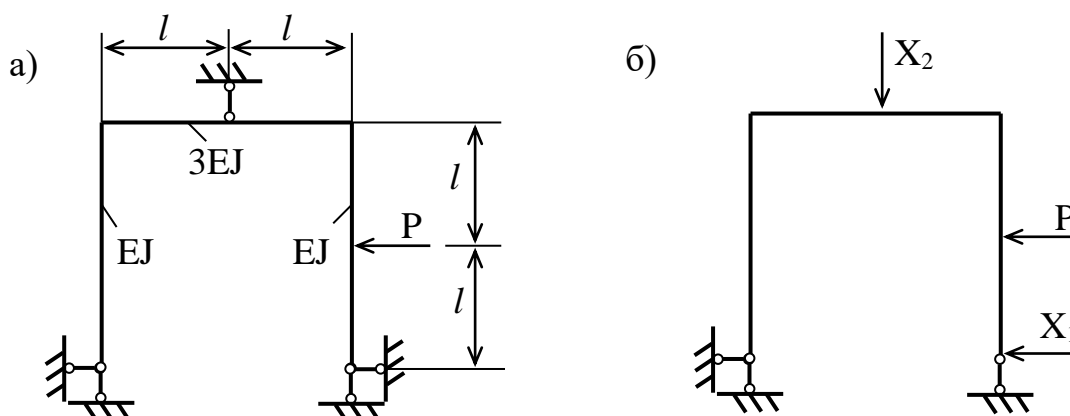


Рис. 3.1. Схема для расчета плоской рамы

Записываем систему канонических уравнений метода сил:

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2P} = 0, \end{cases}$$

где  $\delta_{ik}$  - единичное перемещение  $i$ -го направления под действием единичной силы  $X_k = 1$ . Свободный член  $\Delta_{ip}$  означает перемещение  $i$ -го направления от внешней нагрузки. В данном случае  $i = 1, 2$ ;  $k = 1, 2$ .

Строим грузовую и единичные эпюры моментов, соответствующие грузовому и единичным состояниям системы (рис. 3.2, а-в).

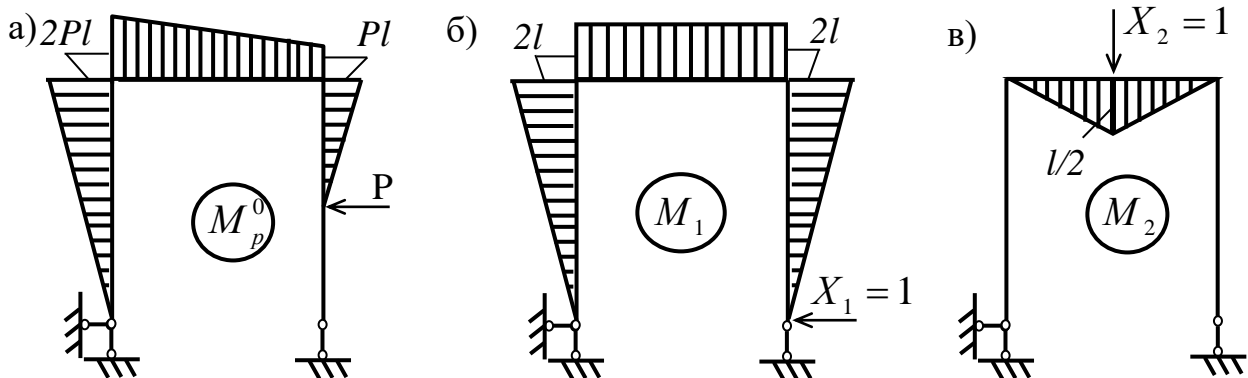


Рис. 3.2. Грузовая и единичные эпюры моментов

Вычисляем единичные коэффициенты и свободные члены системы канонических уравнений по формуле Мора:

$$\delta_{ik} = \sum \int_l M_i \frac{M_k dz}{EJ}; \quad \Delta_{ip} = \sum \int_l M_i \frac{M_p dz}{EJ},$$

где  $M_i$  и  $M_k$  - значения единичных моментов,  $M_p$  - значение грузового момента,  $EJ$  - жесткость сечения,  $l$  - длина участка.

Вычисление интеграла Мора при наличии прямолинейных участков на эпюрах моментов можно получить по формуле «трапеций» [1,4]. Например, коэффициент  $\delta_{11}$  по формуле «трапеций» запишем так:

$$\begin{aligned} \delta_{11} = & \frac{2l}{6EI} (2 * 2l * 2l + 0 * 0 + 2l * 0 + 0 * 2l) + \frac{2l}{6 * 3 * EI} * (2 * 2l * 2l + 2 * 2l * 2l + 2l * 2l + 2l * 2l) + \\ & + \frac{2l}{6EI} * 2 * 2l * 2l = \frac{8l^3}{EI}. \end{aligned}$$

При нахождении  $\delta_{12} = \delta_{21}$  перемножаем единичные эпюры моментов  $M_1$  и  $M_2$  и по формуле «трапеций» получаем

$$\delta_{12} = \frac{2l}{6 * 3EI} * (2 * 2l * 0 - 2 * 2l * \frac{l}{2} - 2 * l * \frac{l}{2} + 2l * 0) = -\frac{l^3}{3EI}.$$

Коэффициент  $\delta_{22}$  по формуле «трапеций», соответственно, имеет вид

$$\delta_{22} = \frac{2l}{6 \cdot 3EI} * (2 * \frac{l}{2} * \frac{l}{2}) = \frac{l^3}{18 * EI} .$$

Свободный член  $\Delta_{1P}$  находим перемножением единичной эпюры моментов  $M_1$  на грузовую основной системы  $M_P^0$ :

$$\Delta_{1P} = \frac{2l}{6EI} * (2 * 2l * 2Pl) + \frac{2l}{6 \cdot 3EI} * (2 * 2l * 2Pl + 2 * 2l * Pl + 2l * 2Pl + 2l * Pl) + \frac{l}{6EI} * (2 * 2l * Pl + 2l * 0 + 2l * 0 + l * Pl) = \frac{5,5Pl^3}{EI} .$$

Перемножив единичную эпюру моментов  $M_2$  на грузовую основной системы  $M_P^0$ , получаем значение  $\Delta_{2P}$ :

$$\Delta_{2P} = \frac{l}{6 \cdot EI} * (-2 * 0 * 2Pl - 2 * \frac{l}{2} * \frac{3Pl}{2} - Pl * \frac{l}{2} - 0 * \frac{3Pl}{2}) + \frac{l}{6 \cdot 3EI} * (-2 * \frac{l}{2} * \frac{3Pl}{2} - 2 * 0 * Pl - \frac{l}{2} * Pl - 0 * \frac{3Pl}{2}) = \frac{0,25 * Pl^3}{EI} .$$

Для проверки правильности коэффициентов строим суммарно-единичную эпюру  $M_S = M_1 + M_2$  (рис. 3.3).

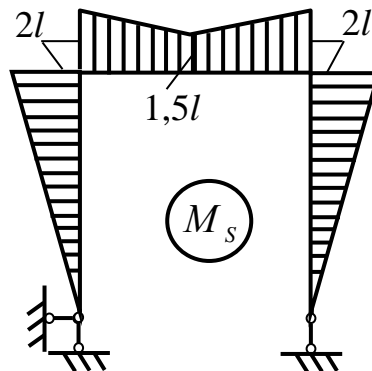


Рис. 3.3. Суммарно – единичная эпюра моментов

По формуле  $\sum \int_l \frac{M_s^2 dz}{EI} = \sum \delta_{ik}$  проверяем правильность

найденных единичных коэффициентов:

$$\sum_l \int \frac{M_s^2 dz}{EI} = 2 * \left[ \frac{2l}{6EI} * (2 * 2l * 2l) + \frac{l}{6 * 3EI} * (2 * 2l * 2l + 2 * 1,5l * 1,5l + 2l * 1,5l + 1,5l * 2l) \right] =$$

$$= \frac{7,389l^3}{EI};$$

$$\sum \delta_{ik} = \frac{l^3}{EI} * (8 - 0,333 * 2 + 0,055) = \frac{7,389 * l^3}{EI}.$$

Таким образом,  $\sum_l \int \frac{M_s^2 dz}{EI} = \sum \delta_{ik}$ , то есть единичные коэффициенты  $\delta_{ik}$  найдены верно.

Аналогично, для проверки правильности найденных свободных членов, используя выражение  $\sum_l \int \frac{M_s M_p^0 dz}{EI} = \sum \Delta_{ip}$ , получаем

$$\sum_l \int \frac{\bar{M}_s * M_p^0 dz}{EI} = \frac{2l}{6EI} * (2 * 2l * 2Pl) + \frac{l}{6 * 3EI} * (2 * 2l * 2Pl + 2 * 1,5l * 1,5Pl + 2l * 2Pl +$$

$$+ 1,5l * 1,5Pl) + \frac{l}{6 * 3EI} * (2 * 1,5l * 1,5Pl + 2 * 2l * Pl + 1,5l * Pl + 2l * 1,5Pl) + \frac{l}{6EI} * (2 * 2l * Pl +$$

$$+ l * Pl) = \frac{5,25Pl^3}{EI};$$

$$\sum \Delta_{ip} = \frac{Pl^3}{EI} * (5,5 - 0,25) = \frac{5,25Pl^3}{EI}.$$

Очевидно, что  $\sum_l \int \frac{M_s M_p^0 dz}{EI} = \sum \Delta_{ip}$ , следовательно,

свободные члены  $\Delta_{ip}$  найдены верно.

Подставляя численные значения единичных коэффициентов и свободных членов в канонические уравнения метода сил и сокращая их на общий множитель  $EI/l^3$ , получаем:

$$\begin{cases} 8X_1 - \frac{1}{3}X_2 + \frac{11}{2}P = 0; \\ -\frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{18}X_2 - \frac{1}{4}P = 0. \end{cases}$$

Определяем основные неизвестные  $X_1$  и  $X_2$  из решения полученной системы уравнений:

$$X_1 = -\frac{2P}{3} \text{ и } X_2 = \frac{P}{2}.$$

Строим в соответствии с формулой  $M_P = M_P^0 + M_1 X_1 + M_2 X_2$  суммарную (результатирующую) эпюру моментов  $M_P$  в заданной системе (рис. 3.4).

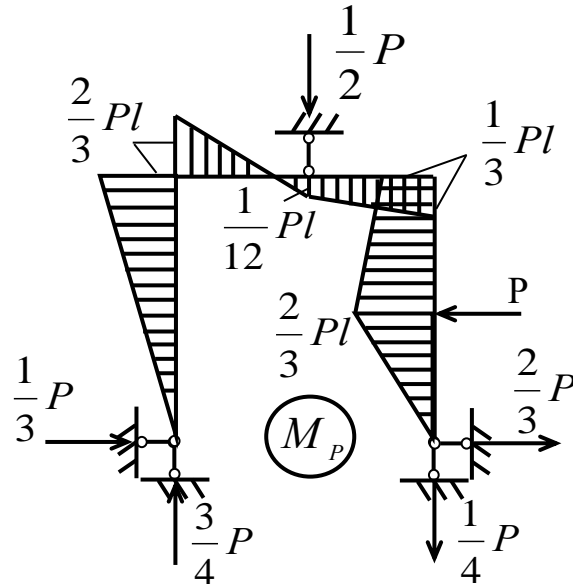


Рис. 3.4. Окончательная эпюра изгибающих моментов

Выполняем кинематический контроль по формуле

$$\Delta_{iP} = \sum \int_l \frac{M_i * M_P dz}{EI} = 0,$$

где  $M_i$  - значения единичных моментов,  $M_P$  - значения результирующих моментов.

Путем умножения окончательной эпюры изгибающих моментов  $M_P$  на единичную эпюру моментов  $M_2$  получаем:

$$\Delta_{2P} = \frac{l}{6 * 3EI} * \left( 2 * \frac{l}{2} * \frac{1 * Pl}{12} - \frac{l}{2} * \frac{2Pl}{3} \right) + \frac{l}{6 * 3EI} * \left( 2 * \frac{l}{2} * \frac{Pl}{12} + \frac{l}{2} + \frac{Pl}{3} \right) = \frac{Pl^3}{18EI} * \left( \frac{1}{12} - \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} \right) = 0, \text{ т.е. кинематическая проверка выполняется.}$$

Строим эпюру перерезывающих сил  $Q_P$  в заданной системе. Эпюру  $Q_P$  можно построить в соответствии с формулой  $Q_j = Q_{j1} X_1 + Q_{j2} X_2 + Q_{jP}^0$  или непосредственно путем дифференцирования окончательной эпюры моментов  $M_P$ . Подробно этот вопрос изложен



в п. 1.1. Эпюра перерезывающих сил  $Q_P$  для данного примера показана на рис. 3.5.

Строим эпюру продольных сил  $N_P$  в заданной системе (см. п.1.1.). Эпюра  $N_P$  изображена на рис. 3.6.

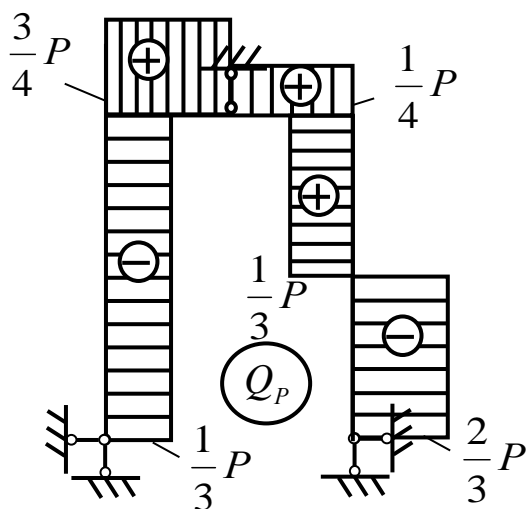


Рис. 3.5. Эпюра перерезывающих сил

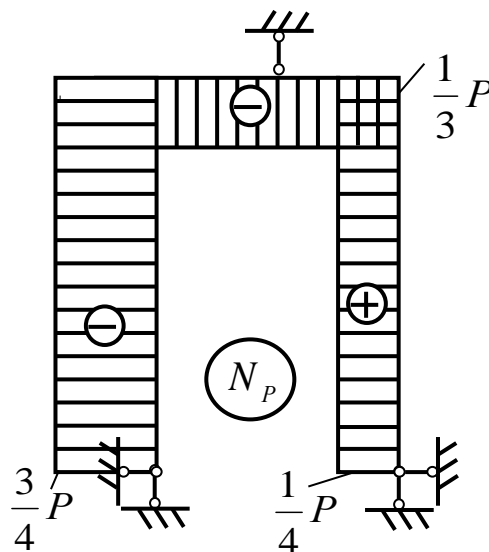


Рис. 3.6. Эпюра продольных сил

Проверяем правильность построения эпюр  $Q_P$  и  $N_P$ , рассматривая равновесие любой отсеченной части (см. п. 1.1.). В данном случае вырезаем ригель рамы и прикладываем к нему внешнюю силу  $X_2 = \frac{P}{2}$  и внутренние силы  $N$  и  $Q$  в местах разреза (рис. 3.7).

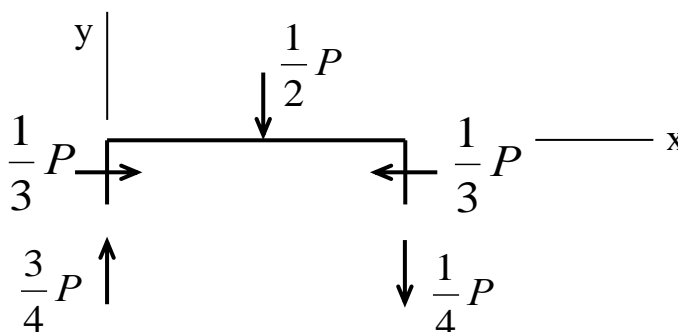


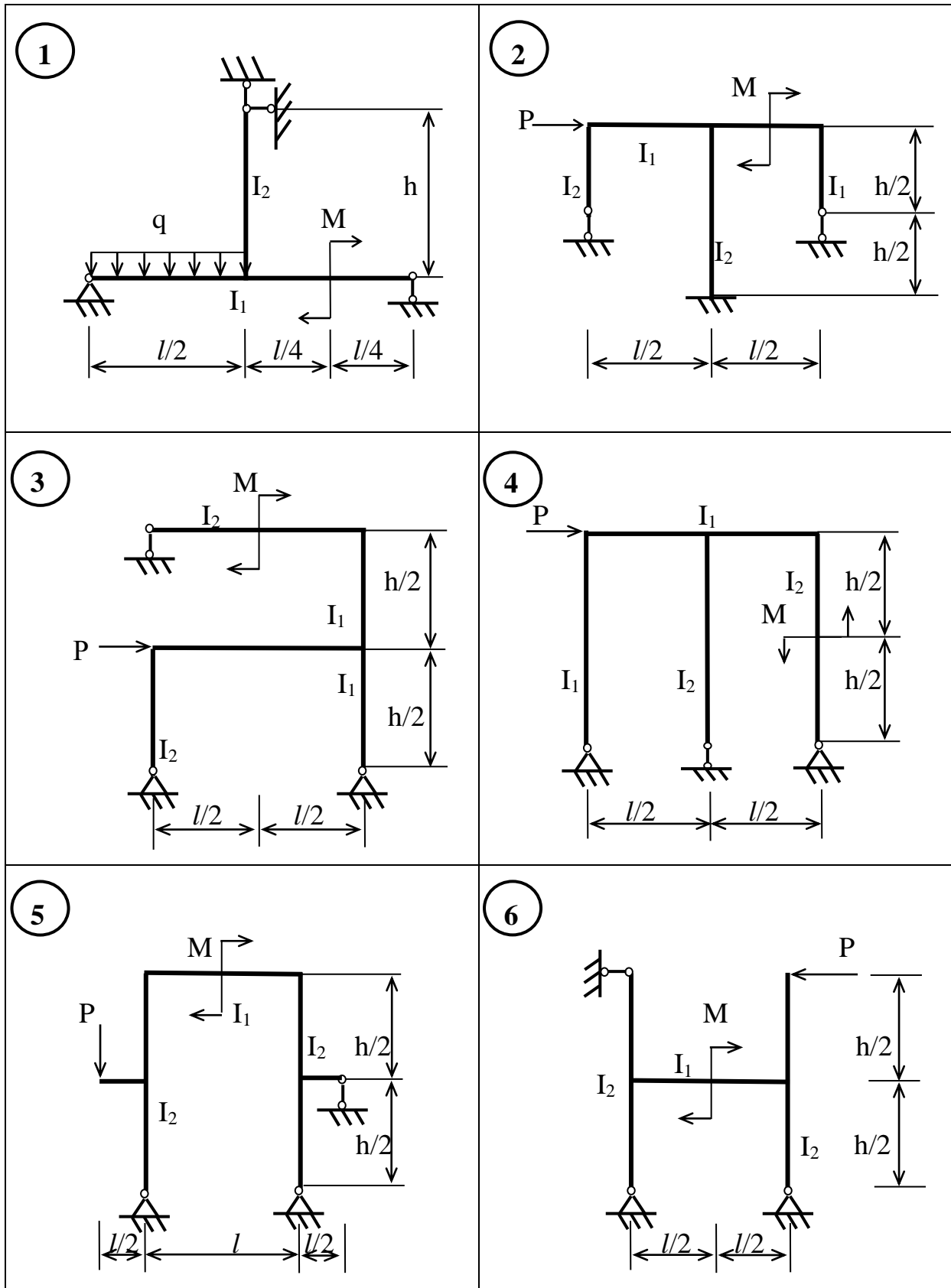
Рис. 3.7. Универсальная проверка

Проецируя все силы на горизонтальную ось  $x$  и вертикальную ось  $y$ , находим:

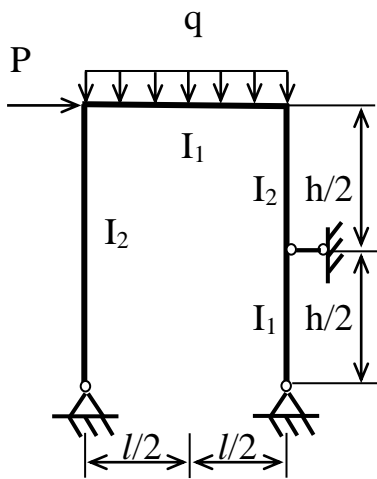
$$\sum F_x = \frac{2}{3}P - \frac{2}{3}P = 0; \quad \sum F_y = \frac{3}{4}P - \frac{1}{2}P - \frac{1}{4}P = 0.$$

Таким образом, условия равновесия выполнены.

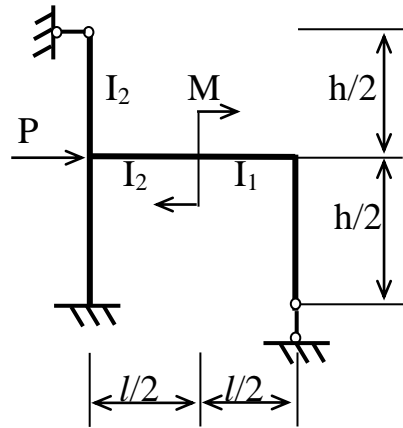
3.2. Варианты заданий к задаче № 3 «Статически неопределимая рама. Метод сил»



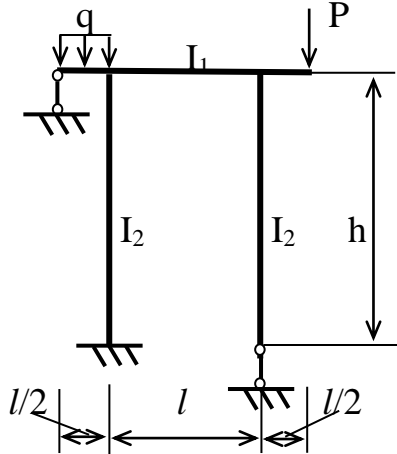
7



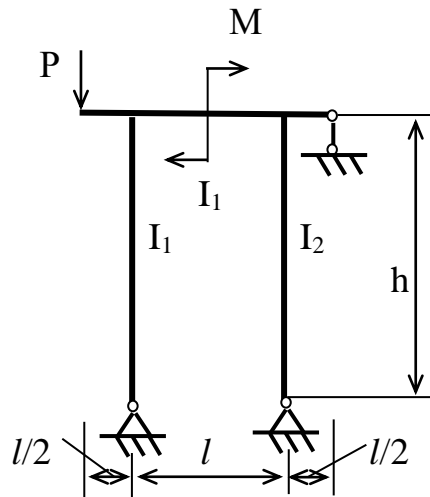
8



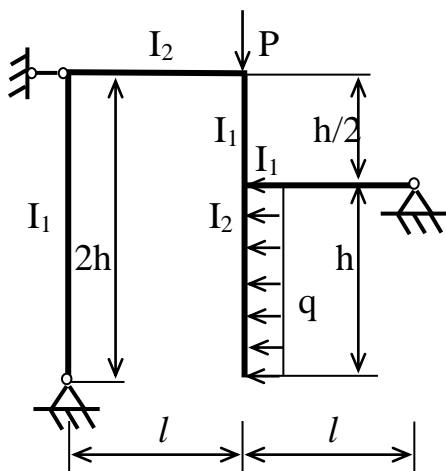
9



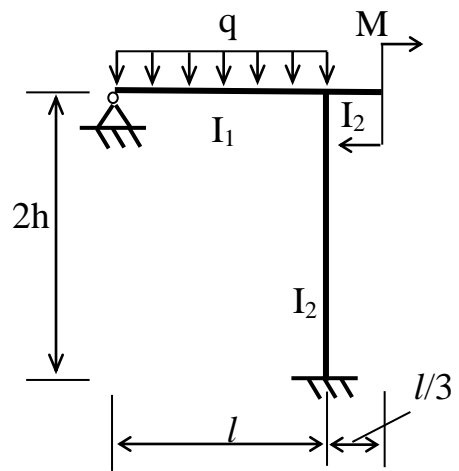
10



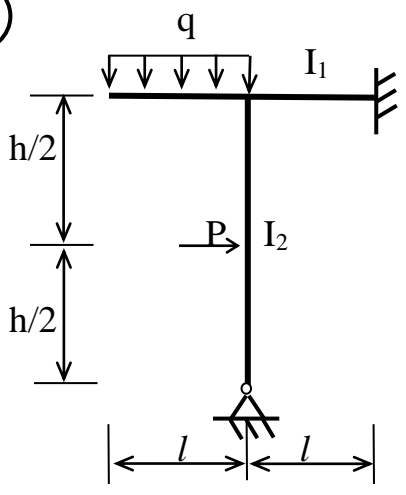
11



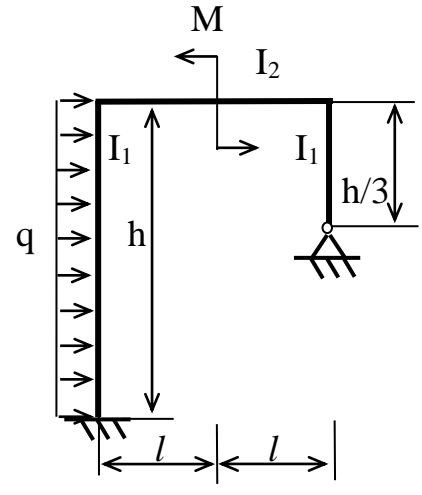
12



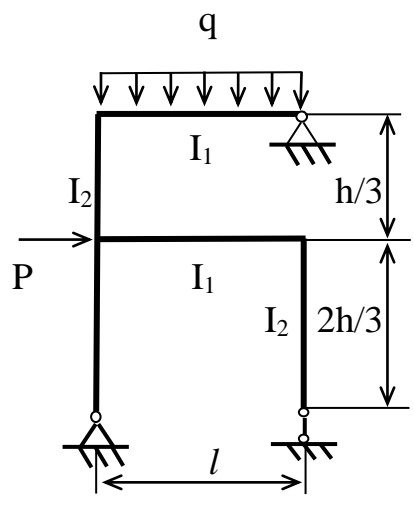
13



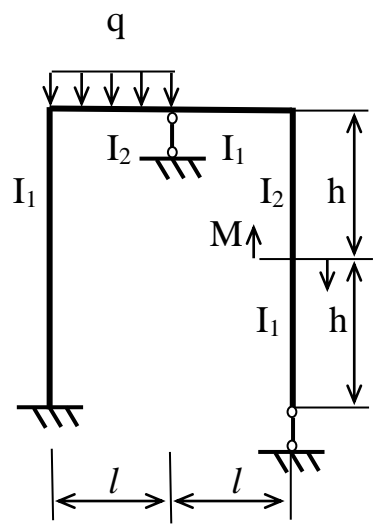
14



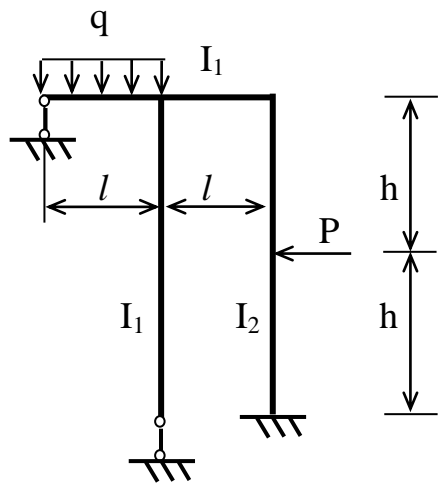
15



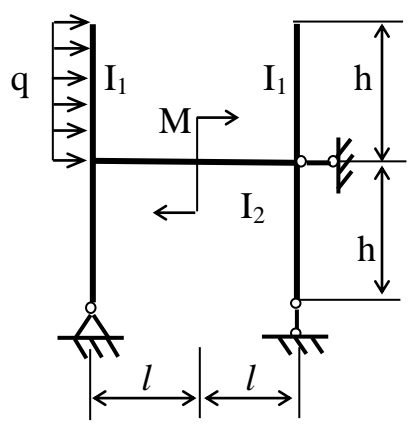
16



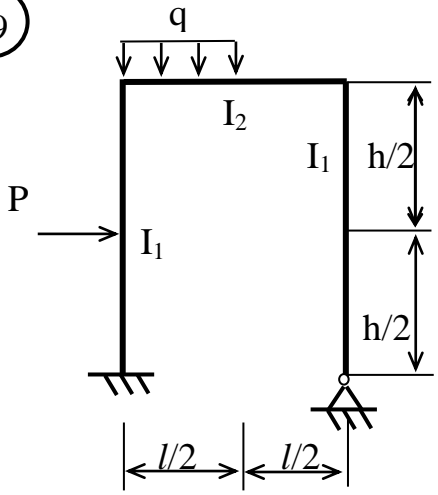
17



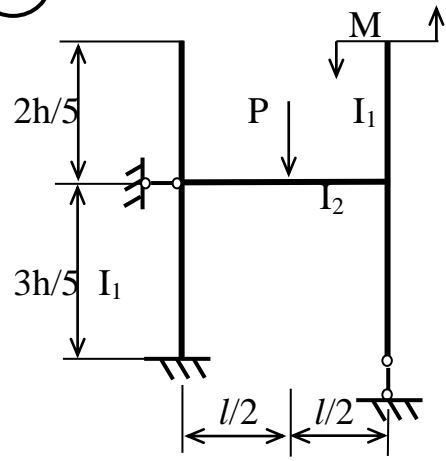
18



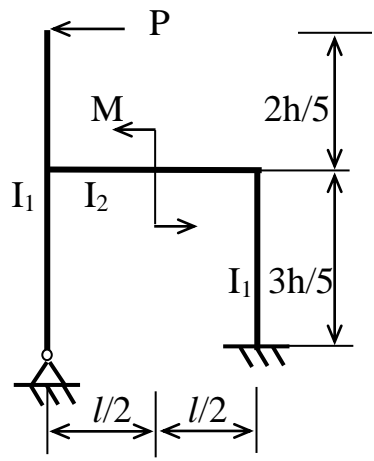
19



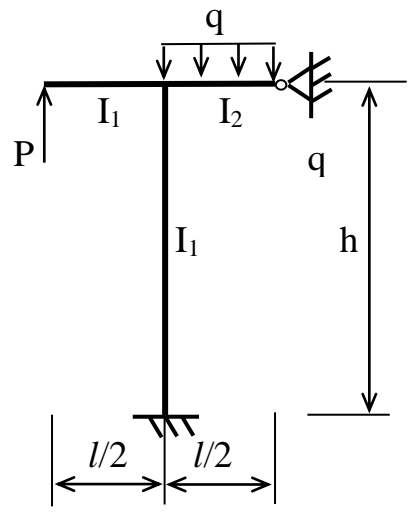
20



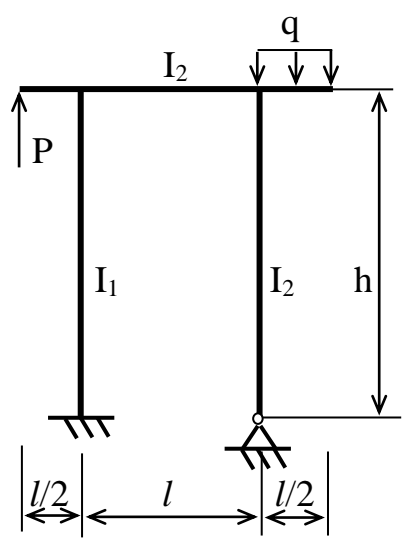
21



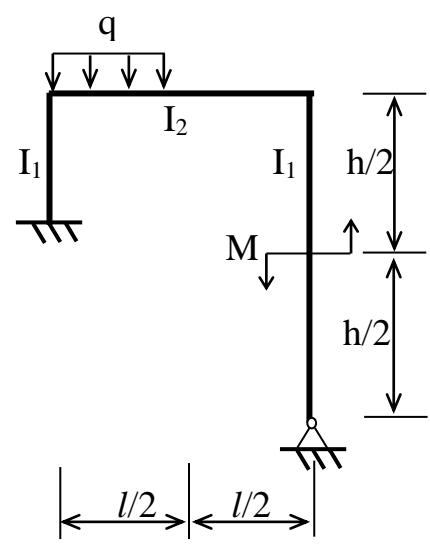
22



23



24



**Численные данные к задаче № 3 «Статически неопределимая рама.  
Метод сил»**

№	По предпоследней цифре шифра				По последней цифре шифра		
	$I_1$	$I_2$	$P, \text{ кН}$	$M, \text{ кНм}$	$h, \text{ м}$	$l, \text{ м}$	$q, \text{ кН/м}$
1	2I	I	4	8	3	2	1
2	8I	4I	2	10	4	3	2
3	I	3I	4	6	1	0.5	1.2
4	8I	2I	8	7	2	1	4
5	6I	3I	6	6	8	4	3
6	I	3I	5	5	12	6	2.5
7	9I	8I	10	20	10	5	4.5
8	4I	I	12	18	5	3	5
9	3I	6I	18	16	6	4	6
10	2I	4I	12	15	12	8	8

### 3.3. Вопросы для самопроверки

1. Для каких задач строительной механики применяется метод сил?
2. Какие требования предъявляются к основной системе метода сил?
3. Физический смысл канонических уравнений метода сил.
4. Определение перемещений по методу Мора.
5. Как осуществляется контроль правильности найденных единичных коэффициентов  $\delta_{ik}$  и свободных членов  $\Delta_{ip}$  системы канонических уравнений?
6. Проверка правильности построения окончательных эпюр внутренних усилий задач строительной механики методом сил (кинематическая, статическая проверка).

## 4. Задача № 4

### «Статически неопределимая рама. Метод перемещений»

#### 4.1 Краткие указания и пример расчета

Задание.

Для рамы заданного варианта с размерами и нагрузкой, выбранными по шифру из табл. 4.1, требуется:

- установить степень кинематической неопределимости;
- выбрать основную систему метода перемещений;
- построить единичные и грузовую эпюры моментов, используя данные приложения 3 (штриховой линией показать деформированное состояние элементов рамы);
- определить единичные и грузовые реакции;
- решив систему канонических уравнений, определить значения основных неизвестных;
- построить окончательные эпюры изгибающих моментов, перерезывающих и продольных сил;
- выполнить статическую проверку окончательных эпюр.

Решение.

Порядок расчета рассмотрим на примере плоской рамы (рис. 4.1, а).

Определяем степень кинематической неопределимости  $n_k$ . В соответствии с шарнирной схемой (рис. 4.1,б) число угловых перемещений  $n_y = 1$ , число линейных перемещений  $n_l = 1$ . В итоге имеем  $n_k = n_y + n_l = 2$ .

Выбираем основную систему с неизвестными  $Z_1$  и  $Z_2$ .

Задаем положительные углы поворота по часовой стрелке, а линейные перемещения – слева направо. Для удобства расчетов обозначим элементы рамы буквами А, В, С, D и К (рис.4.1, в).

Строим единичные и грузовую эпюры моментов, используя данные табл. 4.1, рис. 4.1, г-е. Штриховой линией показываем деформированное состояние элементов рамы.

Например, для элемента DA находим соответствующую балку (приложение 3, №3), определяем момент в точке А по формуле

$$M_A = \frac{3EJ}{l} = \frac{3EJ}{3} = EJ \quad \text{и строим единичную эпюру моментов } M_1 \text{ со}$$

стороны растянутых волокон (рис.4.1, г). Аналогично строятся единичные эпюры на участках АВ, АК и АС.

При построении грузовой эпюры моментов (приложение 3, №1) нужно учитывать значения  $u$  и  $v$ , которые представляют собой доли длины балки. Например, при положении силы  $P$  в центре балки,  $u=v=0,5$ .

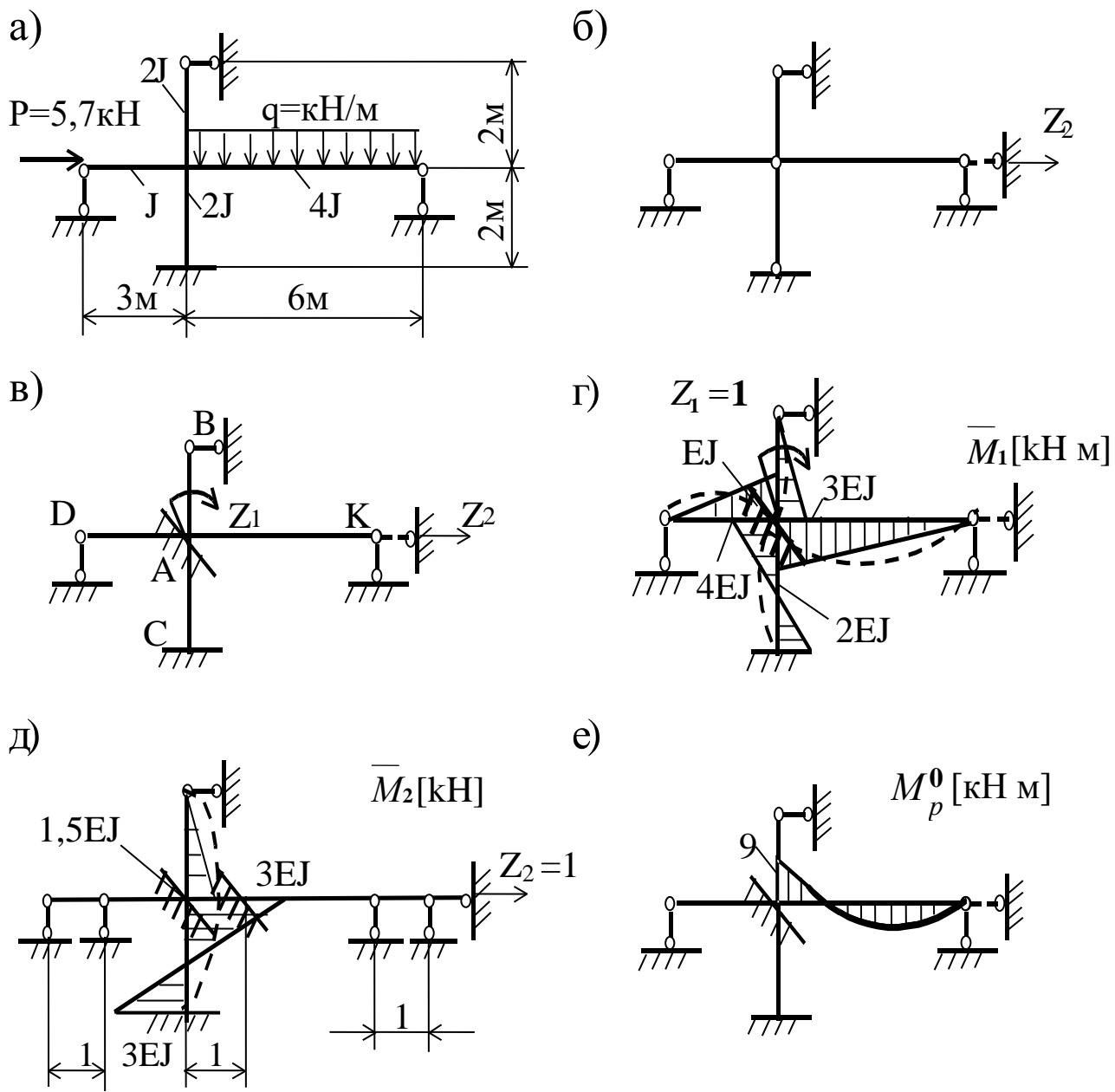


Рис. 4.1. Схемы расчета рамы методом перемещений



Так как эпюры моментов строятся в системе со всеми введенными связями, то от действий нагрузки на каком – либо элементе системы грузовая эпюра  $M_p^0$  будет отличаться от нуля только на этом элементе (рис. 4.1,е). От сосредоточенных сил и моментов, приложенных в узлах, эпюра моментов  $M_p^0$  будет нулевой.

При повороте 1-го узла на угол  $Z_1=1$  моменты будут возникать лишь в тех элементах, которые примыкают к этому узлу (рис. 4.1, г). Линейное (горизонтальное) перемещение 2-го узла  $Z_2=1$  смещает все узлы D, А и К на эту же величину. Поэтому моменты будут возникать только в стойках ВА и АС, примыкающих к данному ригелю (рис. 4.1, д).

Записываем систему канонических уравнений метода перемещений:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0, \end{cases}$$

где  $r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_{22}$  – единичные реакции;

$R_{1p}, R_{2p}$  – грузовые реакции;

$Z_1, Z_2$  – основные неизвестные (перемещения).

Определяем единичные и грузовые реакции. Вырезая узлы, находим моментные реакции. Вырезая ригели, т.е. смещающиеся части рамы, – силовые реакции.

Во введенной 1-ой связи (плавающая заделка) возникает моментная реакция. Для определения коэффициентов  $r_{11}, r_{12}$  и  $R_{1p}$  вырезаем узел А из единичных эпюр  $M_1$  и  $M_2$  и грузовой эпюры  $M_p^0$ , направляем искомые реакции по ходу часовой стрелки. Составляя уравнения равновесия узлов, определяем  $r_{11}, r_{12}$  и  $R_{1p}$  (рис. 4.2).

$$\Sigma M_A = r_{11} - 3EJ - EJ - 4EJ - 2EJ = 0, \text{ тогда } r_{11} = 10EJ \text{ кНм (рис. 4.2,а).}$$

$$\Sigma M_A = r_{12} - 1,5EJ + 3EJ = 0, \text{ то есть } r_{12} = -1,5EJ \text{ кНм(рис.4.2,б).}$$

$$\Sigma M_A = R_{1p} + 9 = 0. \text{ Таким образом, } R_{1p} = -9 \text{ кНм (рис. 4.2,в).}$$

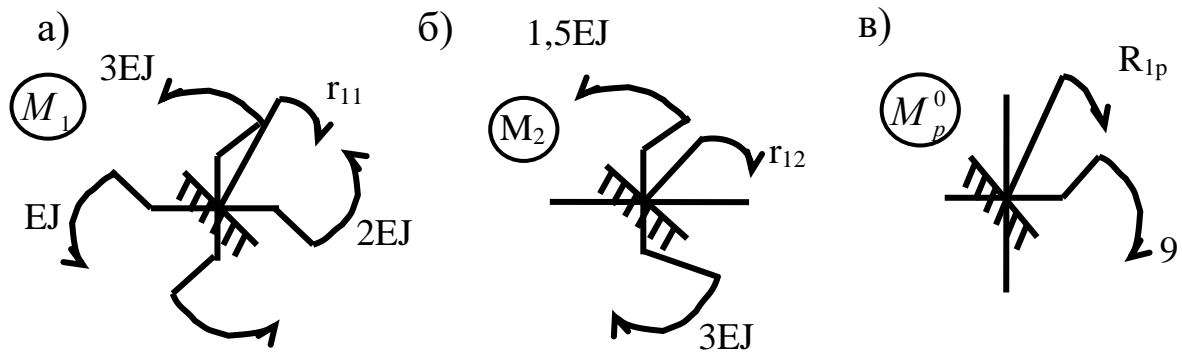
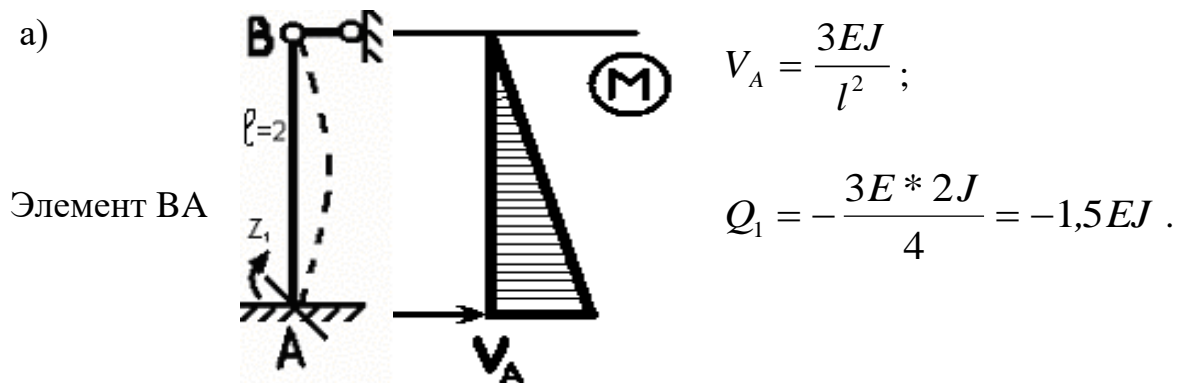


Рис. 4.2. Узел А, вырезанный из эпюр: а) единичная эпюра  $M_1$ ; б) единичная эпюра  $M_2$ ; в) грузовая эпюра основной системы  $M_p^0$

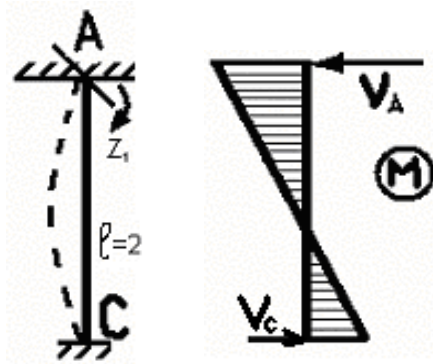
Во введенной связи  $Z_2$  (шарнирная опора) возникает силовая реакция. Для определения коэффициентов  $r_{21}$ ,  $r_{22}$  и  $R_{2p}$  вырезаем ригель ДК рамы из единичных эпюр  $M_1$  и  $M_2$  и грузовой эпюры  $M_p^0$ . Направляем искомые реакции слева направо. Из уравнений равновесия  $\sum F_x = 0$  определяем коэффициенты  $r_{21}$ ,  $r_{22}$  и  $R_{2p}$  (рис. 4.4, а, б, в).

Для вычисления перерезывающих сил  $Q_1$  и  $Q_2$  находим по таблице значение реакции  $V_A$  (приложение 3, № 3, 7). Направление внутренних сил  $Q_1$  и  $Q_2$  противоположно действию реакции  $V_A$  (рис. 4.3, а, б).



б)

Элемент AC



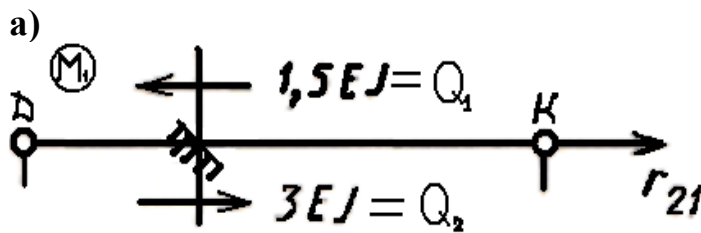
$$V_A = \frac{6EJ}{l^2};$$

$$Q_2 = -\frac{6E * 2J}{4} = -3EJ.$$

Рис. 4.3. Определение перерезывающих сил элементов АВ и АС

Вырезаем ригель DK из единичной эпюры  $M_1$  и направляем искомую реакцию  $r_{21}$  слева направо. Составляем уравнение суммы проекций сил на ось  $x$  (рис.4.4, а).

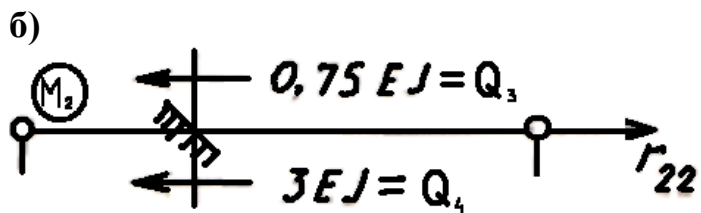
Аналогично составляются расчетные схемы для определения  $r_{21}$  и  $R_{2p}$  (рис. 4.4, б,в). Знак минус показывает, что реакция действует в противоположном направлении.



$$\Sigma F_x = r_{21} + Q_2 - Q_1 = 0.$$

Тогда

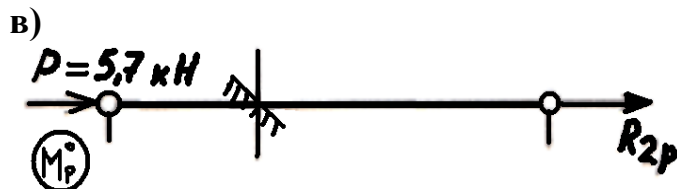
$$r_{21} = Q_1 - Q_2 = 1,5EJ - 3EJ = -1,5EJ \text{ кН.}$$



$$\Sigma F_x = r_{22} - Q_3 - Q_4 = 0.$$

Таким образом,

$$r_{22} = Q_3 + Q_4 = 3,75EJ \text{ кН.}$$



$$\Sigma F_x = R_{2p} + P = 0,$$

то есть

$$R_{2p} = -5,7 \text{ кН.}$$

Рис. 4.4. Расчетные схемы для определения коэффициентов  $r_{21}$ ,  $r_{22}$  и  $R_{2p}$

Подставляем найденные коэффициенты в систему канонических уравнений метода перемещений и вычисляем основные неизвестные  $Z_1$  и  $Z_2$ :

$$\begin{cases} 10EJ * Z_1 - 1,5EJ * Z_2 - 9 = 0; \\ -1,5EJ * Z_1 + 3,75EJ * Z_2 - 5,7 = 0. \end{cases}$$

Получаем 
$$Z_1 = \frac{1,2}{EJ} м; Z_2 = \frac{2}{EJ} м.$$

Строим суммарную (результующую) эпюру изгибающих моментов  $M_p$  (рис.4.5).

Определяем значения суммарных моментов в точках А, В, С, D, К для каждого стержня заданной рамы, используя эпюры единичных и грузовых моментов  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_p^o$  (рис. 4.4, г - е):

$$M_j = M_{jp}^o + m_{j1} * Z_1 + m_{j2} * Z_2; \quad M_{D\underline{A}} = 0 + EJ * \frac{1,2}{EJ} + 0 = 1,2;$$

$$M_{B\underline{A}} = 0 + 3EJ * \frac{1,2}{EJ} + 1,5EJ * \frac{2}{EJ} = 6,6; \quad M_{K\underline{A}} = 9 - 2EJ * \frac{1,2}{EJ} + 0 = 6,6;$$

$$M_{C\underline{A}} = 0 - 4EJ * \frac{1,2}{EJ} + 3EJ * \frac{2}{EJ} = -1,2; \quad M_{CA} = 0 + 2EJ * \frac{1,2}{EJ} - 3EJ * \frac{2}{EJ} = -3,6.$$

По найденным значениям строим результирующую эпюру  $M_p$  (рис.4.5).

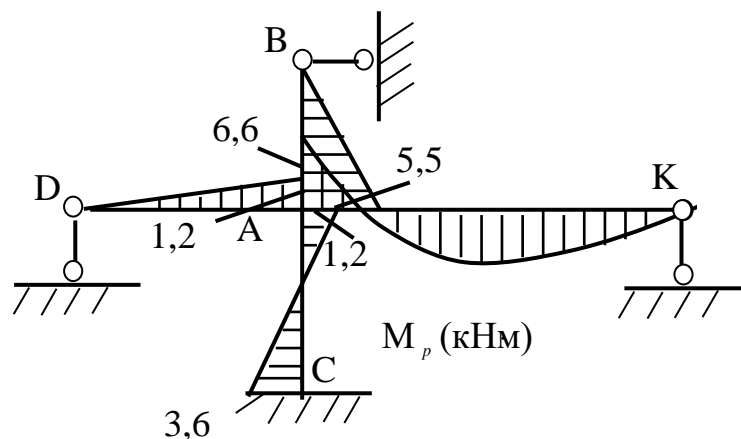


Рис. 4.5. Результирующая эпюра изгибающих моментов

Производим универсальный контроль решения – проверяем равновесие узлов и отсеченных частей.

Запишем уравнение суммы моментов относительно узла А (рис. 4.6, а):  $\sum M_A = 6,6 - 6,6 + 1,2 - 1,2 = 0$ .

Таким образом, равновесие узла А сохраняется.

Для определения перерезывающих сил в стойках, примыкающих к ригелю ДК, воспользуемся формулой

$$Q = \frac{M_n - M_l}{d} + q\left(\frac{d}{2} - z\right),$$

где  $M_n$  - значение момента на правом конце участка;  $M_l$  - значение момента на левом конце участка;  $d$  - длина участка;  $q$  - распределенная нагрузка;  $z$  - текущая абсцисса с началом на левом конце участка.

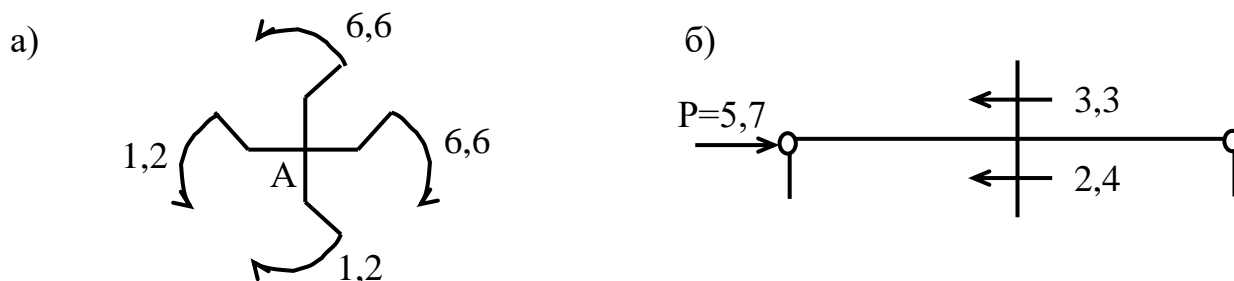


Рис. 4.6. Универсальная проверка

Например, для участка АВ

$$M_B = M_l = 0; M_A = M_n = 6,6 \text{ кНм}; d = 2 \text{ м}.$$

Тогда 
$$Q = \frac{6,6 - 0}{2} = 3,3 \text{ кН}.$$

На участке АС

$$M_A = M_l = 1,2 \text{ кНм}; M_C = M_n = 3,6 \text{ кНм}; d = 2 \text{ м}.$$

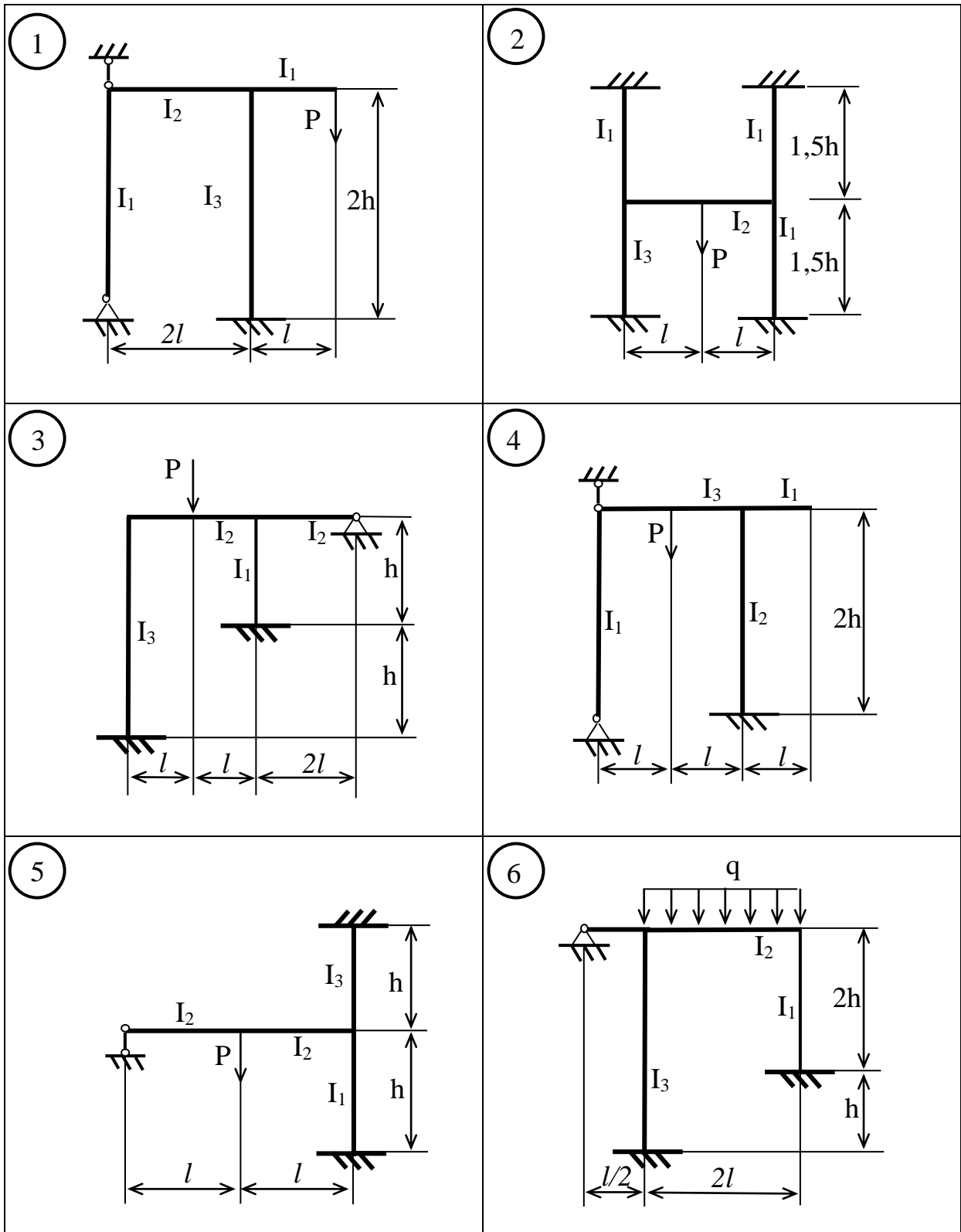
В итоге получаем 
$$Q = \frac{3,6 + 1,2}{2} = 2,4 \text{ кН}.$$

Составляем уравнение суммы проекций всех сил на ось х (рис.4.6, б):

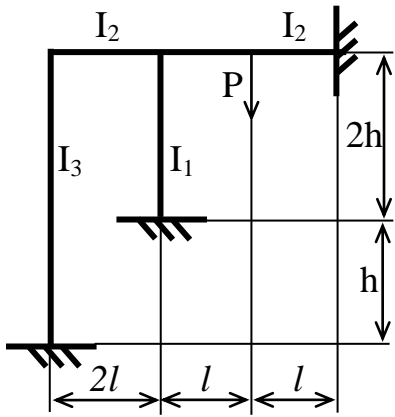
$$\sum F_x = 5,7 - 3,3 - 2,4 = 0.$$

Следовательно, условие равновесия ригеля ДК выполняется.

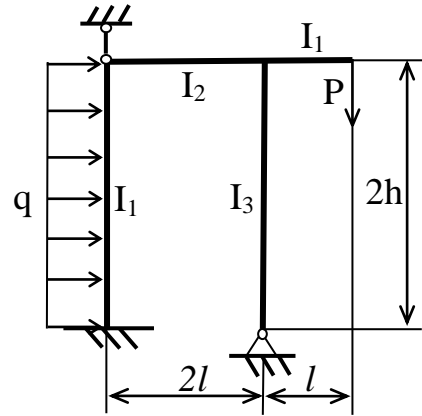
4.2. Варианты заданий к задаче № 4 «Статически неопределимая рама. Метод перемещений»



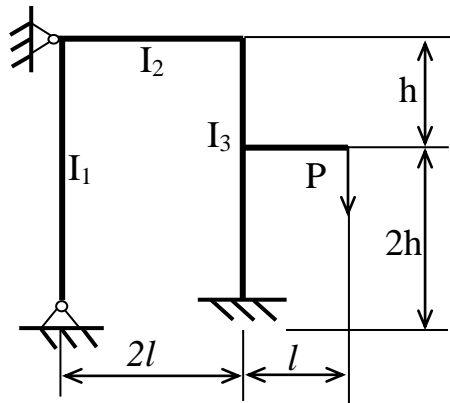
7



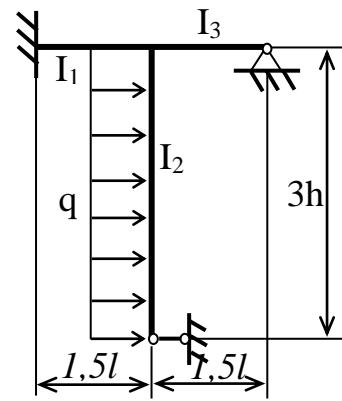
8



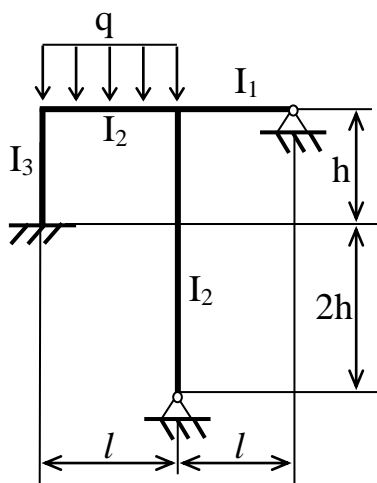
9



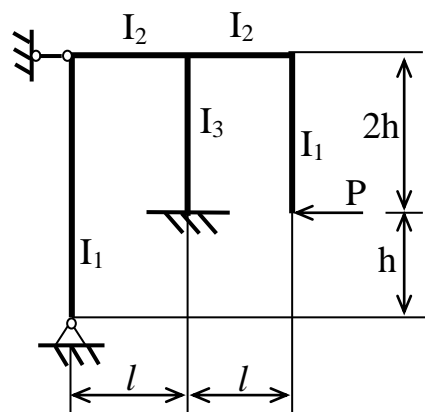
10



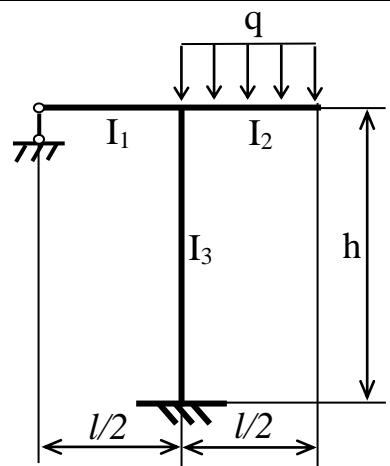
11



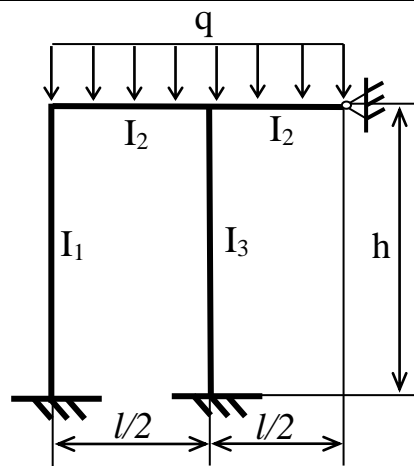
12



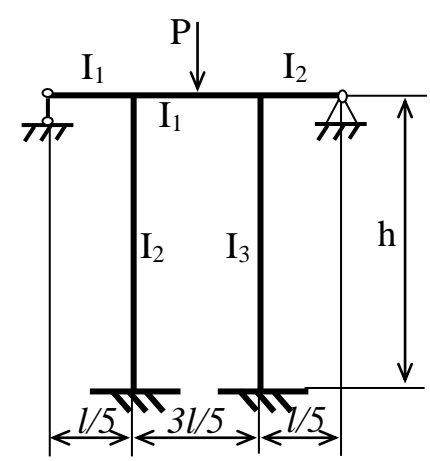
13



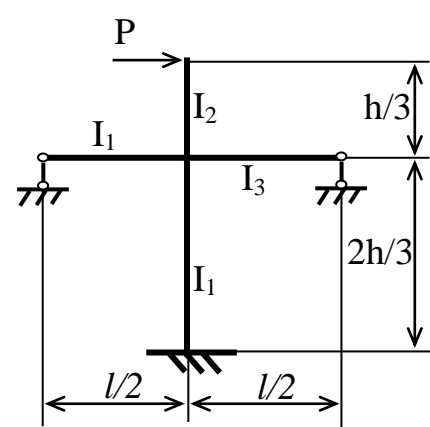
14



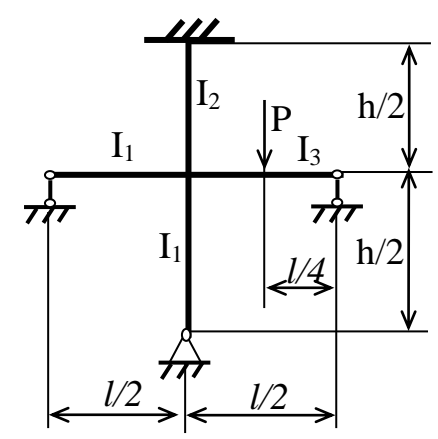
15



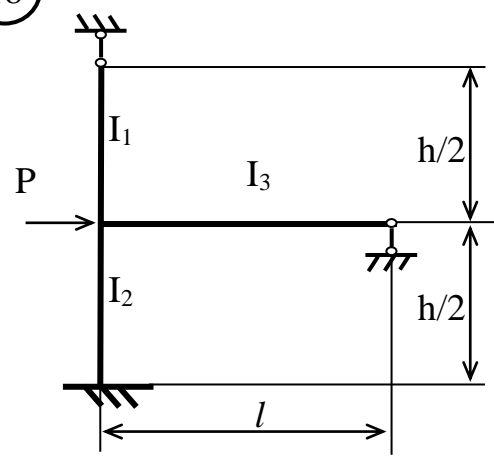
16



17

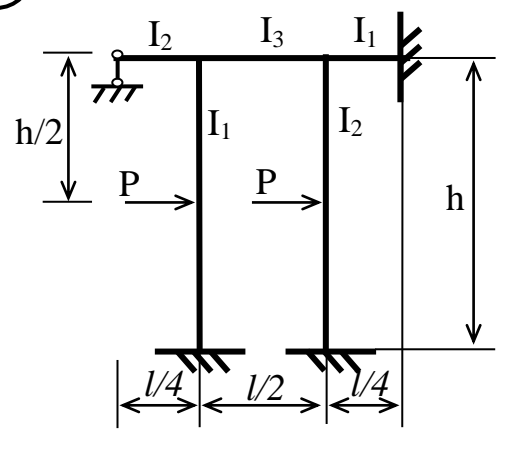


18

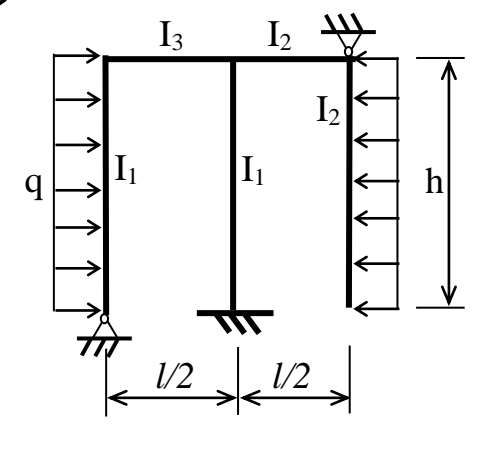




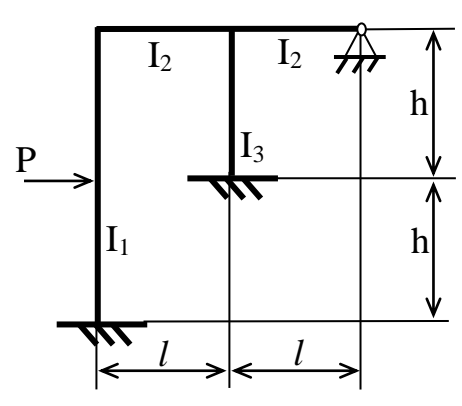
19



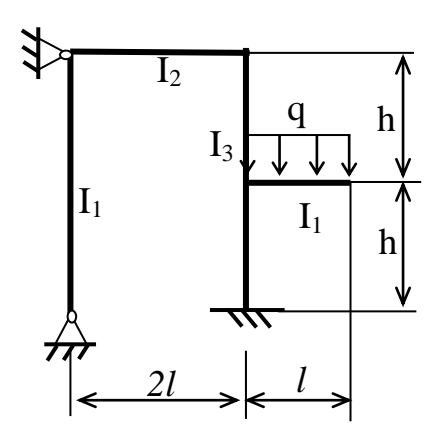
20



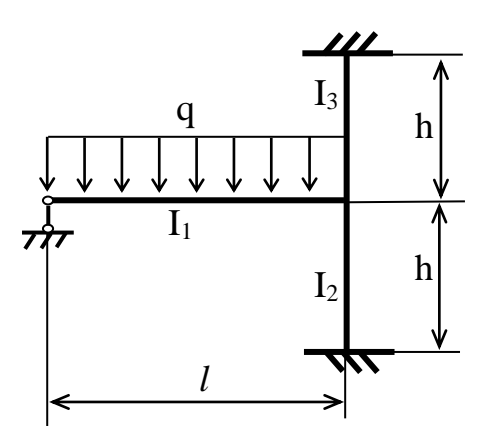
21



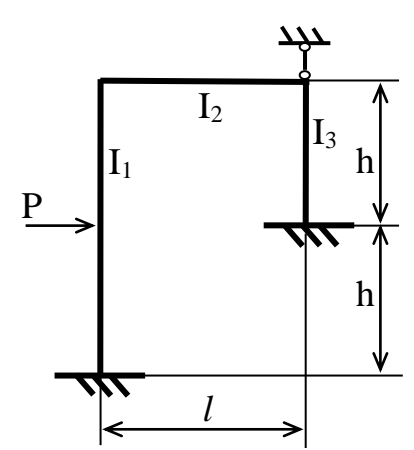
22



23



24



**Численные данные к задаче № 4 «Статически неопределимая рама.  
Метод перемещений»**

№	По предпоследней цифре шифра				По последней цифре шифра			
	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$P, \text{ кН}$	$M, \text{ кНм}$	$h, \text{ м}$	$l, \text{ м}$	$q, \text{ кН/м}$
1	2I	I	3I	4	8	3	2	1
2	8I	4I	4I	2	10	4	3	2
3	I	3I	2I	4	6	1	0.5	1.2
4	8I	2I	I	8	7	2	1	4
5	6I	3I	4I	6	6	8	4	3
6	I	3I	2I	5	5	12	6	2.5
7	9I	8I	9I	10	20	10	5	4.5
8	4I	I	8I	12	18	5	3	5
9	3I	6I	7I	18	16	6	4	6
10	2I	4I	3I	12	15	12	8	8

### 4.3. Вопросы для самопроверки

1. Этапы решения задач строительной механики методом перемещений.
2. Определение степени кинематической неопределимости на примере расчета рам.
3. Основная система метода перемещений.
4. Физический смысл записи канонических уравнений метода перемещений.
5. Что означают коэффициенты  $r_{ik}$ ,  $R_{ip}$  системы канонических уравнений метода перемещений и как они определяются?
6. Построение окончательной эпюры изгибающих моментов при реализации метода перемещений.
7. Проверка правильности построения эпюр внутренних усилий при решении задач строительной механики методом перемещений.

## Литература

1. Бермант А.Ф., Исаак Г.А. Краткий курс математического анализа для втузов. – М.: 1967. – 736с.
2. Бояршинов С.В. Основы строительной механики машин. – М.: Машиностроение, 1973 – 456с.
3. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1986 – 544с.
4. Живейнов Н.Н., Карасев Г.Н., Цвей И.Ю. Строительная механика и металлоконструкции строительных и дорожных машин. – М.: Машиностроение, 1988. -280с.
5. Клейн Г.К., Леонтьев Н.Н., Ванюшенков М.Г. и др. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики. – М.: Высшая школа, 1980. -205с.
6. Ржаницин А.Р. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1991. -440с.
7. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Наука, 1972. -320с.
8. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов для втузов. – М.: Наука, 1986. -512с.

## Приложение 1

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Тюменский индустриальный университет»  
Институт транспорта

Кафедра «Прикладная механика»

КУРСОВАЯ РАБОТА  
по строительной механике

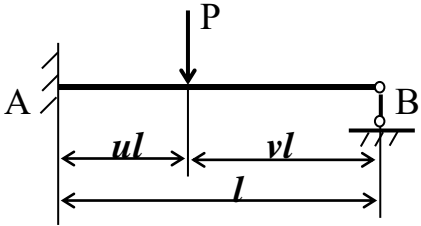
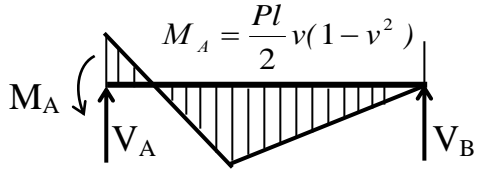
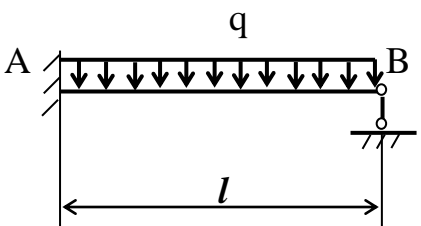
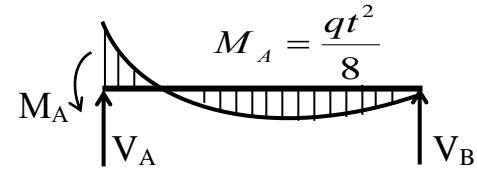
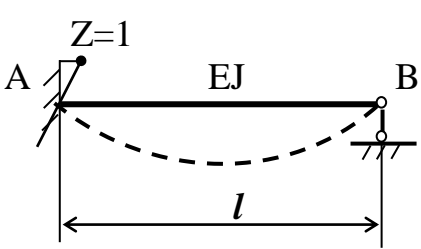
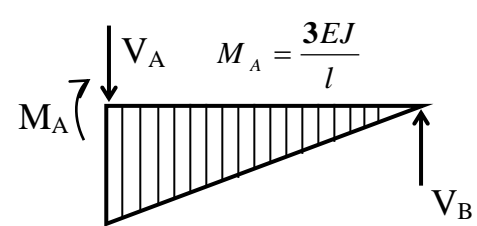
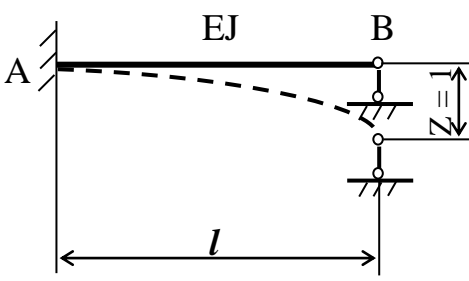
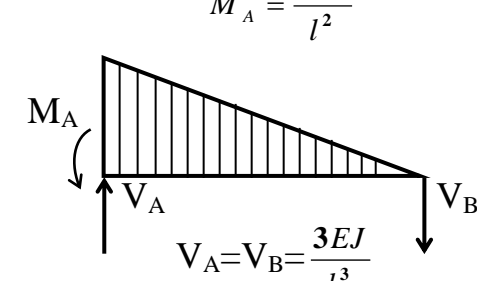
Выполнил: студент группы	<u>        </u>	<u>группа</u>		
		<u>Ф.И.О.</u>		
		<u>        </u>	<u>вариант</u>	
		<u>        </u>	<u>шифр</u>	
Проверил:	<u>        </u>	<u>должность</u>	<u>        </u>	<u>Ф.И.О.</u>

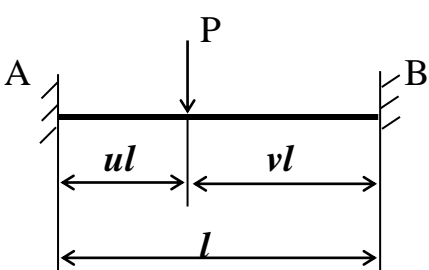
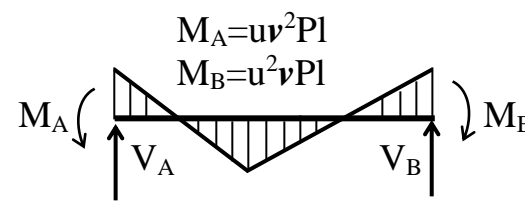
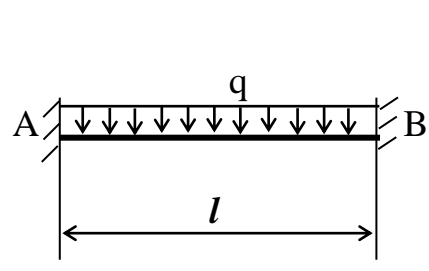
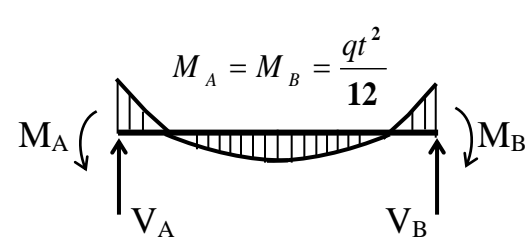
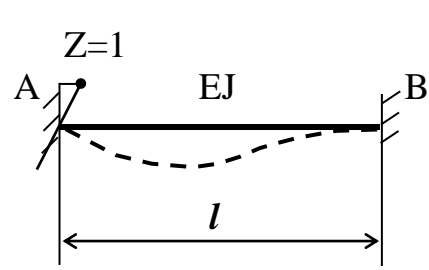
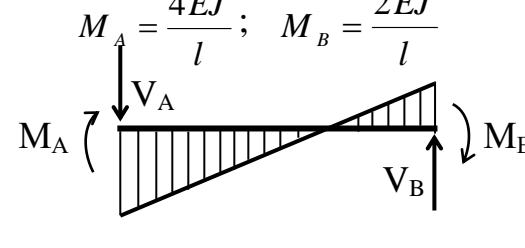
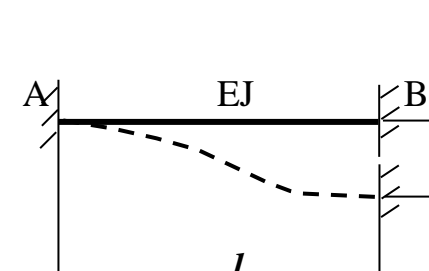
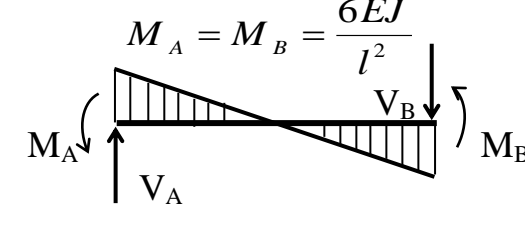
Тюмень 2024

## Приложение 2

№	По предпоследней цифре		По последней цифре шифра		
	P, кН	M, кНм	q, кН/м	a, м	κ=H/B
1	10	10	10	1	0.4
2	11	20	9	2	0.8
3	<b><u>12</u></b>	<b><u>30</u></b>	8	3	1.2
4	13	40	7	4	1.6
5	14	50	6	5	2
6	15	60	5	6	2.4
7	16	70	4	7	2.8
8	17	80	3	8	3.2
9	18	90	<b><u>2</u></b>	<b><u>9</u></b>	<b><u>3.6</u></b>
10	19	100	1	10	4

Реакции и моменты в балках постоянной жесткости

№ п/п	Схема балки и воздействия на нее	Эпюра моментов и реакций
1		 $M_A = \frac{Pl}{2}v(1-v^2)$ $V_A = \frac{Pv}{2}(3-v^2); \quad V_B = \frac{Pu}{2}(3-u)$
2		 $M_A = \frac{ql^2}{8}$ $V_A = \frac{5}{8}ql \quad V_B = \frac{3}{8}ql$
3		 $M_A = \frac{3EJ}{l}$ $V_A = V_B = \frac{3EJ}{l^2}$
4		 $M_A = \frac{3EJ}{l^2}$ $V_A = V_B = \frac{3EJ}{l^3}$

№ п/п	Схема балки и воздействия на нее	Эпюры моментов и реакций
5		 $M_A = uv^2Pl$ $M_B = u^2vPl$ $V_A = v^2(1+2u)P; V_B = u^2(1+2v)P$
6		 $M_A = M_B = \frac{ql^2}{12}$ $V_A = V_B = \frac{ql}{2}$
7		 $M_A = \frac{4EJ}{l}; M_B = \frac{2EJ}{l}$ $V_A = V_B = \frac{6EJ}{l^2}$
8		 $M_A = M_B = \frac{6EJ}{l^2}$ $V_A = V_B = \frac{12EJ}{l^3}$

Учебное издание

## **СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА**

Методические указания для курсовой работы  
для студентов специальности 15.03.03 Прикладная механика  
направленность (профиль): Моделирование механических систем  
и процессов

Составители

КРИВЧУН Наталья Аркадьевна  
УМАНСКАЯ Ольга Леонидовна

*В авторской редакции*

Подписано в печать \_\_\_\_ . \_\_\_\_ 20 \_\_\_\_ . Формат 60x90 1/16. Усл. печ. л. 3,5.  
Тираж \_\_\_\_ экз. Заказ № \_\_\_\_ .

Библиотечно-издательский комплекс  
федерального государственного бюджетного образовательного  
учреждения высшего образования  
«Тюменский индустриальный университет».  
625000, Тюмень, ул. Володарского, 38.

Типография библиотечно-издательского комплекса.  
625039, Тюмень, ул. Киевская, 52.